

Relaxation eines 2-Niveau-Systems unter dem Einfluss eines Phasenqubits

Diplomarbeit
von

Daniel Mischek

An der Fakultät für Physik
Institut für Theorie der kondensierten Materie

Erstgutachter:	Prof. Dr. Alexander Shnirman
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Alexey Ustinov
Betreuender Mitarbeiter:	Dr. Clemens Müller

Bearbeitungszeit: 21. Juni 2010 – 27. Juni 2011

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben.

Karlsruhe, 27. Juni 2011

Danksagung

Ich habe zu danken all den Menschen ohne denen diese Diplomarbeit nie zustande gekommen wäre

- Prof. Dr. Alexander Shnirman, für die Ermöglichung diese Diplomarbeit am Institut für Theorie der Kondensierten Materie, sowie die ständige Bereitschaft zur Diskussion,
- Prof. Dr. Alexey Ustinov, für die Übernahme des Korreferats,
- Dr. Clemens Müller, für die sehr gute Betreuung, die angenehme Atmosphäre, das geduldige Erklären, für seine stetige Bereitschaft meine Fragen zu beantworten, auch während der Zeit seiner Promotion, die gleichzeitig in die Zeit meines Abschlusses fiel, ich schätze das sehr, Danke!
- All den Kollegen am Institut, für die freundliche Atmosphäre,
- Der “Gerschgorin“-Truppe aus Zimmer 10.15 für die produktive Zusammenarbeit,
- Christian Seiler für seine Hilfsbereitschaft,
- Dr. Jürgen Lisenfeld, der mir sehr ausführlich und spontan über seine Arbeit erklärt hat, was mich maßgeblich dazu bewogen hat auf dem Forschungsgebiet der Qubits eine Diplomarbeit zu schreiben,
- Fabian Metzger für das Durchforsten nach Rechtschreibfehlern und seine Motivationskünste,
- All meinen Großeltern, insbesondere Opa Paul, der außerordentlich viel für mich getan hat,
- Der aller größte Dank gilt jedoch meinen Eltern für all die Unterstützung über mein ganzes Studium hinweg und den stetigen Glauben an mich.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Bloch Redfield Formalismus	9
2.1. Herleitung der Bloch Redfield Gleichungen	9
3. Das Modell	19
3.1. Gesamthamiltonian	19
3.1.1. Hamiltonoperator des Systems	19
3.1.2. Diagonalisierung des Systemhamiltonians	22
3.1.3. Hamiltonoperator der Umgebung/ Wechselwirkungsoperator zwischen System und Umgebung	26
3.2. Einfluss einer longitudinalen Kopplung an die Umgebung	28
4. Methoden	31
4.1. Lösungsstruktur der Bloch Redfield Gleichungen	31
4.2. Berechnung der Relaxations- und Dephasierungsraten	32
4.2.1. Relaxationsrate T_1^{-1}	32
4.2.2. Dephasierungsraten $T_{2;m/m}^{-1}$	35
5. Ergebnisse	39
5.1. Vorstellung der Experimente und Motivation	39
5.1.1. Relaxations- und Dephasierungszeitkurven als Funktion der Ver- stimmung für feste Temperatur	39
5.1.2. Relaxations- und Dephasierungszeitkurven als Funktion der Tempe- ratur für feste Verstimmung	42
5.2. Parameter des Gesamtsystems	43
5.3. Relaxationsratenverhalten bei $T=0$	44
5.3.1. Fluktuator unter der Wechselwirkung eines 3-Level-Qubits	45
5.3.2. Fluktuator unter der Wechselwirkung eines n-Level-Qubits	48
5.3.3. Zusammenfassung/ Einfluss der Parameter und des Anfangszustan- des auf die Struktur der Relaxationsratenkurve	50
5.4. Relaxationsratenverhalten bei endlichen Temperaturen	54
5.4.1. Relaxationsratenverhalten als Funktion der Verstimmung bei fester Temperatur	56
5.4.2. Relaxationsratenverhalten als Funktion der Temperatur bei fester Verstimmung	60
5.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten	65
5.5.1. Relaxationszeitkurven in Abhängigkeit von der Verstimmung	66
5.5.2. Relaxationszeitkurven in Abhängigkeit von der Temperatur	68
6. Quanten-Zeno-Effekt	73
6.1. Quanten-Zeno-Effekt am Beispiel eines Spin 1/2 im Magnetfeld	73
6.2. Quanten-Zeno-Effekt für ein dissipatives 2-Level-System	74

6.3. Quanten-Zeno-Effekt im n-Level-Qubit-Fluktuator System für die drei energetisch niedrigsten Zustände	75
7. Schlusswort	79
A. Anhang	81
A.1. Fermis Goldene Regel	81
A.2. Wichtige Eigenschaften von Gleichgewichtskorrelationsfunktionen	85
A.2.1. Definitionen	85
A.2.2. Wichtige Eigenschaften	85
A.2.3. Lineare Resonstheorie	88
A.2.4. Fluktuations-Dissipations-Theorem	90
A.2.5. Eigenschaften der Lösung der Bloch Redfield Gleichungen	91

1. Einleitung

Die technische Nutzbarmachung der fundamentalen Gesetze der Quantenmechanik, aber auch das bessere Verstehen derselben, dies alles vereinigt sich in dem lebendigen Forschungsfeld der Quantenbits.

Ein Quantenbit (Qubit) ist dabei ein quantenmechanisches Bit. Im Gegensatz zu einem herkömmlichen Bit, welches die klassische Informationseinheit mit den beiden Zuständen 0 und 1 darstellt, kann ein solches Qubit nach den Gesetzen der Quantenmechanik auch einen Überlagerungszustand der Zustände 1 und 0 einnehmen. Einen solchen Überlagerungszustand $|\Psi_Q\rangle$ kann man sich als einen Zustandsvektor im Hilbertraum aufgespannt durch die beiden Basisvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$ vorstellen,

$$|\Psi_Q\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.1)$$

Schaltet man mehrere Qubits aneinander, so könnte man analog zu den herkömmlichen Gattern der digitalen Elektronik, einfache Gatter aus Qubits konstruieren. Diese Gatter aneinander geschaltet würden komplexe Rechensysteme erlauben, man hätte einen auf seinen Bausteinen basierenden Quantencomputer realisiert [1].

Ist so ein Quantencomputer nun schneller wie ein herkömmlicher Computer, der den Gesetzen der klassischen Physik folgt?

Tatsächlich kann man theoretische Überlegungen dahingehend anstellen. Es stellt sich heraus, dass ein Quantencomputer Stärken wie auch Schwächen in bestimmten Rechenoperationen gegenüber dem klassischen Computer aufweist. Für gewisse Operationen würde keine Beschleunigung der Rechengeschwindigkeit erreicht werden, manche hingegen würden exponentiell erhöht. Ein Beispiel für die Beschleunigung stellt die Faktorisierung großer Zahlen auf der Basis des “Shor’s Algorithmuses” dar [2, 3].

Viele verschiedene Realisierungen für Qubits wurden bislang vorgeschlagen, darunter Atome in optischen Fallen [4], nukleare Spins [5], Photonische Kristalle [6] sowie supraleitende Qubits aus Josephson Kontakten [7, 8, 9].

Abgesehen von der Herausforderung Qubits herzustellen, müssen allgemein die folgenden sogenannten “DiVincenzo-Kriterien” erfüllt sein [2]:

1. Reproduzierbar- und Skalierbarkeit
2. Qubitzustand muss initialisierbar sein
3. Hinreichend lange Qubitkohärenzzeiten für die Rechenoperationen
4. Interkonnektivität der Qubits
5. Auslese des Qubitzustandes muss möglich sein

Gerade die supraleitenden Qubits aus Josephson Kontakten stellen hier wegen ihrer relativ leichten Reproduzierbar- und Skalierbarkeit, erfolgsversprechende Kandidaten dar [10].

1. Einleitung

Zu den supraleitenden Qubits gehört auch das hier behandelte Phasenqubit. Ein solches setzt sich aus einem supraleitendem Ring mit einem Josephson Kontakt und zusätzlicher Induktivität zusammen. Der Ring wird von einem magnetischen Fluss ϕ_{ext} durchsetzt.

Der die Dynamik des Phasenqubits charakterisierende Hamiltonoperator H_Q schreibt sich wie folgt,

$$H_Q = E_C(\hat{p} - n_G)^2 + E_L(\hat{\phi} - \phi_{ext})^2 - E_J \cos(\hat{\phi}), \quad (1.2)$$

$$E_C = \frac{2e^2}{C}, \quad n_G = \frac{V_g C_g}{2e}, \quad E_L = \frac{1}{2L} \left(\frac{\phi_0}{2\pi} \right)^2, \quad E_J = I_c \frac{\phi_0}{2\pi}, \quad (1.3)$$

mit E_C der Ladungsenergie, n_G der reduzierten Gatespannung, E_L der induktiven Energie und E_J der Josephson Energie. Ferner ist I_c der kritische Strom und ϕ_0 das magnetische Flussquant. \hat{p} und $\hat{\phi}$ werden als Impulsoperator und Ortsoperator interpretiert, welche die kanonische Vertauschungsrelation erfüllen,

$$[\hat{p}, \hat{\phi}] = i. \quad (1.4)$$

Ein Prinzipschaltbild des Phasenqubits mit einem typischen Potentialverlauf zeigt Abbildung 1.1.

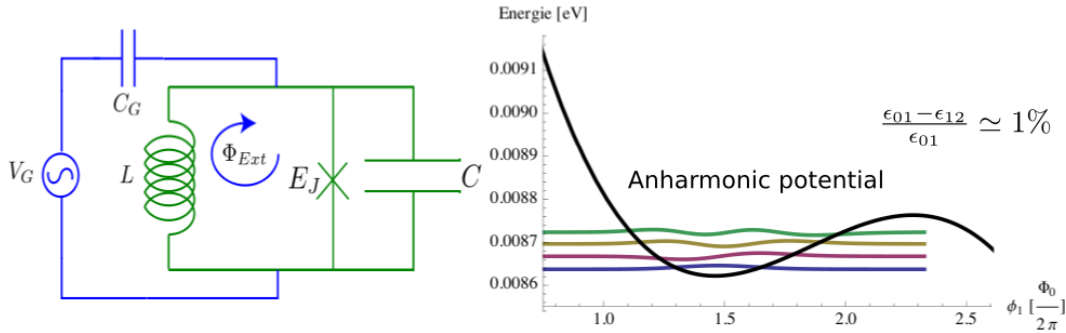


Abbildung 1.1.: links Prinzipschaltbild: In blau Ankopplung der Mikrowelle über Kapazität C_G , ϕ_{ext} bezeichnet den externen Fluss. In grün Josephson Kontakt E_J , intrinsische Kapazität C und zusätzliche Induktivität L ; rechts Potential als Funktion der supraleitenden Phase ϕ zusätzlich sind die ersten vier Energieeigenzustände eingezeichnet.

Der rechte Teil der Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Potential des Hamiltonoperators (1.2). Wir erkennen eine Potentialmulde, welche eine endliche Anzahl von Energielevels aufweist. Als Qubit werden dabei die ersten beiden Energiezustände benützt. Die Bevölkung des erst angeregten Zustandes wird durch Einstrahlung einer Mikrowelle, resonant mit dem Energieunterschied zwischen Grundzustand und erst angeregten Zustand, realisiert. Hierbei dient die Anharmonizität zur Unterscheidung zwischen den darüberliegenden Übergängen. Diese Nichtäquidistanz der Energieunterschiede im Potential kommt aufgrund der Nichtlinearität der intrinsischen Induktivität des Josephson Kontaktes zustande. Die Auslese des Qubitzustandes erfolgt herkömmlicherweise durch einen kurzen Flussimpuls welcher die Mulde soweit verringert, dass alle Zustände oberhalb des Grundzustandes die Mulde ins Kontinuum verlassen können. Dies führt zu einer Änderung der

supraleitenden Phase über dem Josephon Kontakt, welche wiederum zu einer Flussänderung durch den Ring führt. Diese Flussänderung kann mit hochpräzisen DC-SQUIDS (in engl. "Direct Current Superconducting Quantum Interference Devices") nachgewiesen werden, und somit letztlich der Zustand des Qubits [11].

Ein Nachteil der Phasenqubits sowie allgemein der supraleitenden Qubits gegenüber anderen Qubits stellen ihre relativ kurzen Relaxations- T_1 und Kohärenzzeiten T_2 dar. Unter der Relaxationszeit T_1 versteht man die charakteristische Zeit bei der die Diagonalelemente der Dichtematrix des Zustandes $|\Psi_Q\rangle$ in ihren Gleichgewichtswert zerfallen. Hingegen ist die Kohärenzzeit T_2 die typische Zeit bei der die Nebendiagonalelemente zerfallen. Für ein allgemeines Zwei-Niveau-System welches durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird,

$$H = H_S + H_{SR} + H_R \quad (1.5a)$$

$$H = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z - \frac{1}{2}[\sin(\eta)\sigma_x + \cos(\eta)\sigma_z]V(X) + H_R, \quad (1.5b)$$

mit H_S dem Hamiltonian des Zwei-Niveau-Systems, H_R dem Hamiltonian der Umgebung und H_{SR} deren Wechselwirkung untereinander, erhält man für die Relaxations- $T_{1,2NS}^{-1}$ und Dephasierungsrate $T_{2,2NS}^{-1}$ folgende Ausdrücke,

$$T_{1,2NS}^{-1} = \frac{1}{2}\sin^2(\eta)S_V(\omega = \epsilon), \quad (1.6a)$$

$$T_{2,2NS}^{-1} = \frac{1}{2}\Gamma_1 + T_{\phi,2NS}^{-1}. \quad (1.6b)$$

Dabei ist,

$$T_{\phi,2NS}^{-1} = \frac{1}{2}\cos^2(\eta)S_V(\omega = 0), \quad (1.7)$$

die "reine Dephasierungsrate" aufgrund der longitudinalen Kopplung zum Bad $\propto \sigma_z V(X)$. Die Relaxations- $T_{1,2NS}^{-1}$ und Dephasierungsrate $T_{2,2NS}^{-1}$ werden mit der symmetrisierten Gleichgewichtskorrelationsfunktion $S_V(\omega)$ verknüpft,

$$S_V(\omega) := \frac{1}{2}(C_V(\omega) + C_V(-\omega)). \quad (1.8)$$

Diese stellt eine spezifische Größe der Umgebung dar.

Die Effekte der Relaxation und Dekohärenz beruhen auf der endlichen Kopplung des Systems zu seiner Umwelt. Bei supraleitenden Qubits sind die genauen Quellen der Relaxation und Dekohärenz noch nicht entgültig geklärt, das Studium derer ist aktuelles Forschungsgebiet. Bei Phasenqubits wurde jedoch eine Verbesserung der Abschirmung zur Umgebung bereits durch die Verwendung von induzierten Strömen durch Magnetfelder erreicht.

Wie kann man Dissipation und Dekohärenz theoretisch beschreiben?

Um die wesentlichen Eigenschaften von Dissipation in der klassischen Mechanik richtig wiederzugeben, führt man den Bewegungsgleichungen ad hoc einen Reibungsterm hinzu, welcher proportional zur Geschwindigkeit des Teilchens ist. Im Falle des harmonischen Oszillators erhält man dadurch einen Abfall der Amplitude, der Geschwindigkeit sowie der Energie, die dissipativen Eigenschaften werden also richtig wiedergegeben.

1. Einleitung

In der Tat wurden für die in der Zeitordnung reversible Schrödingergleichung schon ähnliche Erweiterungen vorgenommen, befriedigend scheinen diese jedoch nicht zu sein, den die Frage nach dem zugrundeliegenden Mechanismus bleibt dadurch weiterhin unbeantwortet [12].

Ein weiterer wichtiger Punkt in dieser Hinsicht ist das von dem Mathematiker und Physiker Henri Poincaré aufgestellte Wiederkehr-Theorem. Das Theorem besagt, dass ein abgeschlossenes, konservatives System für hinreichend lange Zeiten seinem Anfangszustand beliebig nahe kommt [13]. Beide Punkte, die scheinbare Unmöglichkeit der Existenz von zeitumkehrbaren Gleichungen aus in der Zeitordnung völlig reversiblen zugrundeliegenden Grundgleichungen sowie das streng mathematisch bewiesene Wiederkehr-Theorem, wurden historisch zum ersten Mal als Einwand für die nach seinem Begründer Ludwig Boltzmann in der Zeitordnung irreversible Boltzmann-Gleichung herangezogen. Beide Punkte wurden jedoch frühzeitig von Boltzmann selbst entkräftigt [14].

Der Schlüssel zum Verständnis für Dissipation physikalischer Systeme liegt in der Vorstellung, dass das zu betrachtenden dissipative System mit seiner Umgebung eine nicht-verschwindende Wechselwirkung besitzt. Die Umgebung besitzt ihrerseits eine sehr große Anzahl an Freiheitsgraden. Einmal vom System in die Umgebung transferierte Energie wird somit für physikalisch sinnvolle Zeiten nicht mehr in das System zurückkehren. Wir erhalten genau den Effekt der Dissipation.

Quellen der Relaxation und Dekohärenz können verschiedene Systeme sein, so z.B. Phononen in Festkörpern, Photonen aber auch Ensemble von Zwei-Niveau-Systemen.

Einzelne Zwei-Niveau-Systeme mit einer Eigenfrequenz in der Größenordnung der Eigenfrequenz des Qubits eröffnen dabei zusätzliche Kanäle der Relaxation und Dekohärenz [15, 16]. Solche hochfrequenten Zwei-Niveau-Systeme wurden in Phasenqubits zum ersten Mal in spektroskopischen Daten ("Qubitspektroskopie") in der Gruppe von John M. Martinis im Jahre 2003 entdeckt [17].

Abbildung 1.2 zeigt einen Ausschnitt aus diesem Experiment.

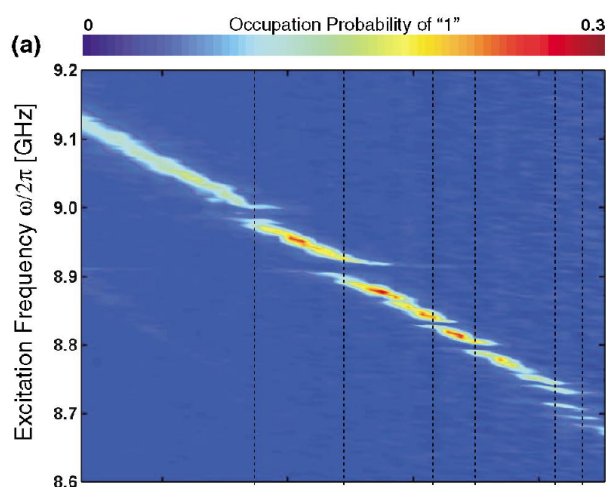


Abbildung 1.2.: Gemessene Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Zustandes $|1\rangle$ als Funktion der eingestrahlten Mikrowellenfrequenz und externem Fluss ϕ_{ext} ; Levelaufspaltungen an den Resonanzstellen aufgrund der Wechselwirkung mit einem weiteren 2-Niveau-System; Quelle: [17].

Bei diesem Experiment wird die Wahrscheinlichkeit den angeregten Zustand $|1\rangle$ im Qubit vorzufinden als Funktion der eingestrahlten Mikrowellenfrequenz und des externen magnetischen Flusses ϕ_{ext} gemessen. Mit zunehmendem Fluss wird die Potentialmulde kleiner was eine Erniedrigung des Energieunterschiedes ω_{01} zwischen den Qubitzuständen zur Folge hat. Völlig in Übereinstimmung mit der Erwartung zeigt das Experiment, dass mit zunehmendem Fluss das resonante Treiben bei immer kleiner werdender Frequenz der Mikrowelle stattfindet. Wir erkennen dies an dem hellen Streifen in der Abbildung. Zusätzlich sehen wir aber auch, dass an bestimmten externen magnetischen Flüssen $\phi_{ext,i}$ eine Aufspaltung der Anregungsfrequenz stattfindet. Man kann sich diese Aufspaltungen dadurch erklären, dass ein weiteres 2-Niveau-System in Wechselwirkung mit dem Qubit steht.

Die Erklärung des Befundes findet man im Hamiltonoperator gekoppelten Systems,

$$H_S = H_Q + H_F + H_{WW}^{QF}, \quad (1.9a)$$

$$H_S = -\frac{1}{2}\omega_{01}\sigma_z - \frac{1}{2}\omega_f\tau_z + \frac{1}{2}v\sigma_x\tau_x. \quad (1.9b)$$

Abbildung 1.3 zeigt die Eigenzustände des vorliegenden Hamiltonoperators für den Resonanzfall $\omega_{01} = \omega_f$:

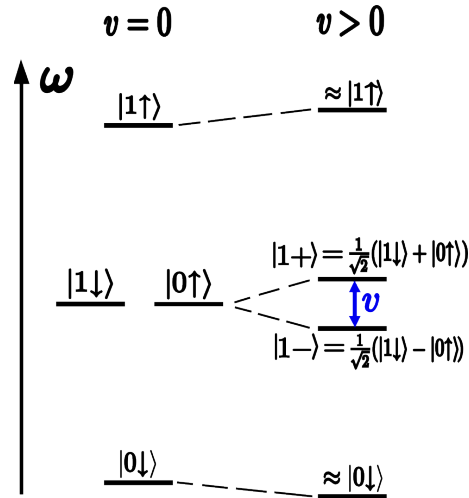


Abbildung 1.3.: Eigenzustände des gekoppelten Systems aus Qubit und 2-Niveau-System für den Resonanzfall $\omega_{01} = \omega_f$. links: verschwindende Kopplung $v = 0$; rechts: endliche Kopplung $v > 0$.

Anregungen in Form von Ein-Photonenübergängen finden bei endlicher Kopplung $v > 0$ zwischen dem Grundzustand und den hybridisierten Zuständen statt,

- $|1+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\downarrow\rangle + |0\uparrow\rangle)$,
- $|1-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\downarrow\rangle - |0\uparrow\rangle)$.

Diese weisen im Resonanzfall eine Energieaufspaltung $\omega_{1+} - \omega_{1-}$ in der Größe der Kopplungskonstante v auf, dies erklärt die Aufspaltung in Abbildung 1.2 an Stellen $\phi_{ext,i}$. Hohe Intensitäten erlauben zudem Zwei-Photonenübergänge zwischen dem Grundzustand $|0\downarrow\rangle$ und dem höchstangeregten Zustand $|1\uparrow\rangle$, was sich in einer zusätzlichen jedoch schwächeren Linie zwischen den Energieaufspaltungen äußern würde (in 1.2 nicht zu sehen)

1. Einleitung

[18, 19, 20].

Tatsächlich wurden Kollektive von Zwei-Niveau-Systemen bereits in den 1970 Jahren erfolgreich zur Deutung der Anomalie der thermischen Leitfähigkeit und der spezifischen Wärme in amorphen Systemen herangezogen [21, 22, 23].

Zwei-Niveau-Systeme sind heute in allen Qubits nachgewiesen, wenngleich sie am häufigsten in Phasenqubits vorgefunden werden. Solche weisen sich durch eine gegenüber anderen Qubits verhältnismäßig große Kontaktfläche des Josephson Kontaktes aus. Ihre mikroskopische Natur ist dabei noch nicht endgültig geklärt. Hinweise deuten jedoch auf die Existenz von elektrischen Dipolen, welche über das elektrische Feld der Tunnelbarriere des Josephson Kontaktes an das Qubit ankoppeln, oder bistabile Ionen in der Tunnelbarriere welche zu einer Modulation des kritischen Stromes führen, hin [24, 18, 20, 25].

Seit ihrer Entdeckung wurden viele Eigenschaften und Auswirkungen auf das Qubit untersucht. Sie bewirken nicht nur eine Aufspaltung der Energielevels. Sie haben als weiteres dissipatives Element auch Einfluss auf die Rabi-Oszillationen Mikrowellen getriebener Qubits. So führt die Wechselwirkung beispielsweise zu Schwebungen in den Oszillationen [26, 27, 28, 19]. Sie erklären auch die spektroskopischen Daten mit Mehr-Photonenübergängen [20], [29].

Kollektive von niederfrequenten Zwei-Niveau-Systemen sind Modellgrundlage für das Rauschen mit einer spektralen Dichte welche eine Frequenzabhängigkeit in Form eines inversen Zusammenhang zur Frequenz besitzt, abgekürzt als $\frac{1}{f}$ -Rauschen [30]. Tatsächlich können sie sogar als Speicher des Qubitzustandes aufgrund ihrer meist besseren Kohärenzeigenschaften benützt werden, was eindrucksvoll in [31] gezeigt wurde.

Motivation

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit stellen die Experimente über die Dissipations- und Dephasierungseigenschaften einzelner hochfrequenter Zwei-Niveau-Systeme in Phasenqubits der Gruppe A. Ustinov dar [32]. Im Speziellen wurde die Relaxationszeit T_1 , Dephasierungszeit T_2 und Rabi-Oszillationszerfallszeit T_{rabi} in Abhängigkeit von der Verstimmung $\delta\omega := \omega_f - \omega_{01}$ sowie deren Temperaturcharakteristika vermessen.

Abbildung 1.4 zeigt einen Ausschnitt aus diesem Experiment.

Links in der Abbildung (a,b,c) sehen wir die Antworten des Zwei-Niveau-Systems bei fester Verstimmung $\delta\omega$:

- (a) Relaxationszeitverhalten des angeregten Zwei-Niveau-System zur Bestimmung der Relaxationszeit T_1
- (b) Rabi-Oszillationen in dem Zwei-Niveau-System durch resonantes Treiben mit einer Mikrowelle zur Bestimmung der Rabi-Zerfallszeit T_{rabi}
- (c) Ramsey-Oszillationen zur Bestimmung der Dekohärenzzeit T_2

Auf der rechten Seite (d,e,f) sind die aus (a,b,c) extrahierten Zerfallszeiten als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ aufgetragen.

Völlig in Erwartung für ein Zwei-Niveau-System wechselwirkend mit einem Qubit erhalten wir in allen drei Experimenten eine Abnahme der Zerfallszeit für kleine Verstimmungen

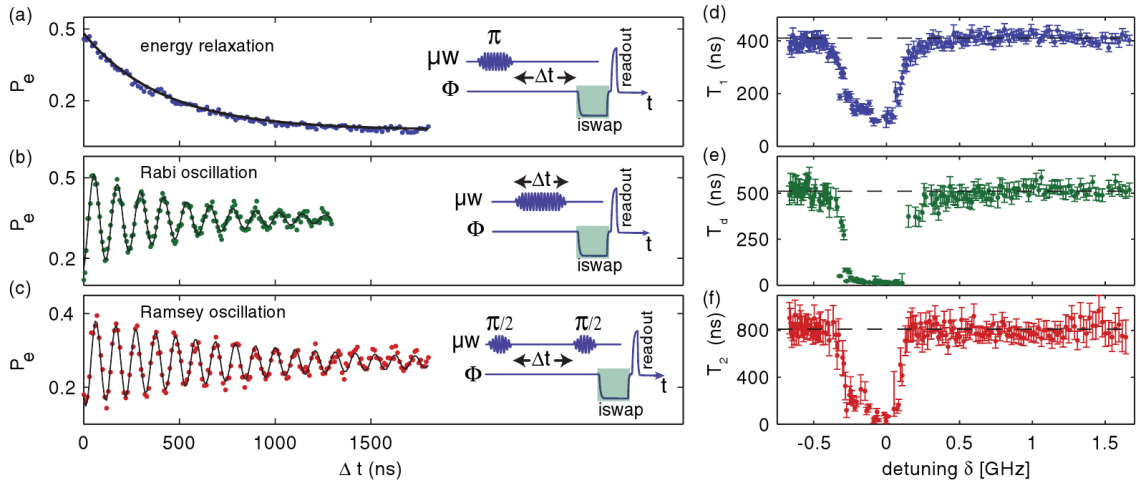


Abbildung 1.4.: Antwortfunktionen des Zwei-Niveau-Systems auf Standardmikrowellensequenzen aus Ref.: [32] (a) Relaxation des Zwei-Niveau-Systems bei fester Verstimmung $\delta\omega$. (b) Rabi-Oszillationen für ein getriebenes Zwei-Niveau-System bei fester Verstimmung $\delta\omega$. (c) Ramsey-Oszillationen bei fester Verstimmung $\delta\omega$ (d,e,f) Die extrahierten Relaxationszeit: T_1 , Rabi-Zerfallszeit: T_{rabi} , und Dekohärenzzeit: T_2 als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$.

$|\delta\omega| \leq v$ [33]. Ungewöhnlich ist jedoch die relativ große Resonanzbreite $\sigma \gg v$, welche zudem stark asymmetrisch zu negativen Verstimmungen hin verschoben ist.

Wir werden in dieser Arbeit einen effektiven Hamiltonian für den Phasenqubithamiltonian (1.2) einführen. Dieser effektive Hamiltonian stellt dabei ein stark anharmonisches Mehr-Niveau-System dar. Wir werden zeigen, dass resonante Wechselwirkung des Zwei-Niveau-Systems mit dem Phasenqubit an allen Zwischenzuständen des Phasenqubits stattfinden kann. Desweiteren erhalten wir aufgrund des abnehmenden Levelabstandes zwischen höheren Levels resonante Wechselwirkung bei zunehmend negativen Verstimmungen $\delta\omega < 0$. Durch eine Überlagerung der einzelnen Resonanzen könnte dann das Bild einer großen Resonanz entstehen, welche zudem zu negativen Verstimmungen hin verschoben ist.

Aufbau der Arbeit

Wir beginnen mit einer Einführung in den Bloch Redfield Formalismus, einen Ansatz zur Beschreibung von offenen Systemen [34, 35]. Der Ausgangspunkt des Formalismus stellt dabei die in der Zeitordnung reversible Schrödingergleichung für das dissipative Fluktuator-Phasenqubit System. Wichtige Näherungen zur Lösbarkeit der Gleichungen werden auf der Grundlage, dass die Umgebung des betrachteten Systems sehr viele Freiheitsgrade besitzt, gemacht. Die Resultate bestätigen im Nachhinein die gemachten Näherungen, die wesentlichen Aspekte der Dissipation gehen nicht verloren und werden richtig wiedergegeben. Im anschließenden Kapitel spezifizieren wir das System und seine Umwelt weiter. Formulieren dabei die einzelnen Hamiltonians des Systems und der Umwelt, insbesondere deren Wechselwirkungsterme.

1. Einleitung

Die anschließende Diskussion widmet sich der allgemeinen Struktur der Gleichungen, der allgemeinen Lösungsform, sowie der Berechnung der Relaxations- T_1 und Dephasierungszeiten T_2 .

Im anschließenden Kapitel analysieren wir dann die Ergebnisse der Berechnungen. Wir studieren dabei zunächst den Fall des Zwei-Niveau-Systems gekoppelt an ein 3-Level-System. Ausgehend von diesem Modell sind wir dann in der Lage Aussagen über das Zwei-Niveau-System unter der Wechselwirkung des Phasenqubits zu treffen.

Die Arbeit schließt mit einer Diskussion des Quanten-Zeno-Effektes ab, ein der Intuition widersprechender jedoch grundlegender Effekt der besagt, dass ein System durch ständige Beobachtung an seiner Zeitentwicklung gehindert wird.

Notationen, Abkürzungen und verwendete Programme

- Wir setzen durchwegs, Ausnahme Vergleich Theorie mit Experiment, $k_B \equiv 1$, $\hbar \equiv 1$.
- Für die Berechnungen der Relaxations- und Dekohärenzzeiten wurde das Computeralgebrasystem “Mathematica 7.0.1” benützt.
- Für die Berechnung der Eigenenergien des Phasenqubitpotentials nach (1.2) wurde das in “Matlab” geschriebene Skript von Dr. Clemens Müller verwendet.
- Für das “Zwei-Niveau-System” wird der Name “Flukutator”, sowie für das “Phasenqubit” das Wort “n-Level-Qubit” zwecks größeren Informationsgehalts synonym verwendet.

2. Bloch Redfield Formalismus

Der Bloch Redfield Formalismus stellt eine Möglichkeit zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Dichtematrix eines Systems, im Folgenden reduzierte Dichtematrix genannt, das an eine Umgebung gekoppelt ist, dar. Wie im Folgenden noch genauer erläutert wird, gibt der Bloch Redfield Formalismus die wesentlichen Eigenschaften adäquat wieder, sofern die Kopplung des Systems an die Umgebung hinreichend klein ist und die Korrelationen der selbigen (Gleichgewichtskorrelationsfunktionen) genügend schnell in der Zeit zerfallen. Im Speziellen erhält man die Möglichkeit die charakteristischen Zerfallsraten für das Systems, die Relaxationsrate T_1^{-1} sowie die Dekohärenzrate T_2^{-1} , auch Dephasierungsrate genannt, anzugeben. Für die folgende Darstellung des Formalismus, haben wir die Bücher Ref.: [36], [37] sowie die wissenschaftlichen Abschlussarbeiten Ref.: [38], [16] benützt. Die ursprünglichen Arbeiten gehen auf die Begründer F.Bloch und A.G.Redfield zurück [34], [35].

2.1. Herleitung der Bloch Redfield Gleichungen

Wir betrachten den folgenden Hamiltonoperator,

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (2.1)$$

mit,

- H_S : Hamiltonoperator des Systems,
- H_R : Hamiltonoperator der Umgebung,
- H_{SR} : Wechselwirkungsoperator zwischen System und Umgebung.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen in den Operatoren linearen Wechselwirkungsterm H_{SR} der folgenden Form,

$$H_{SR} = \sum_i s_i X_i. \quad (2.2)$$

Dabei sind s_i Operatoren des reduzierten Systems und X_i Operatoren der Umgebung. Der Hamiltonian des Systems H_S sowie der Hamiltonian der Umgebung H_R seien vorerst beliebig.

Sei $\chi(t)$ die Dichtematrix des zusammengesetzten Systems $S \otimes R$, deren Zeitentwicklung vollständig durch die fundamentale Liouville Gleichung,

$$\dot{\chi}(t) = -i[H, \chi(t)], \quad (2.3)$$

festgelegt wird. Ausgehend von der Lösung können wir zumindestens im Prinzip alle Eigenschaften des zusammengesetzten Systems berechnen.

2. Bloch Redfield Formalismus

Die Lösbarkeit wird allerdings aufgrund der großen Anzahl der Freiheitsgrade der Umgebung und allen Wechselwirkungen innerhalb derer ungemein verkompliziert. Wir sind jedoch ohnehin nur an den Eigenschaften des Systems interessiert.

Allgemein erhalten wir Erwartungswerte von physikalischen Größen indem wir die Spur der entsprechenden Observable mit der zugrunde liegenden Dichtematrix nehmen. Sei dazu O eine beliebige Observable des Systems. Ihr Erwartungswert erhalten wir wie folgt,

$$\langle O \rangle = Tr_{S \otimes R}[O\chi(t)] = Tr_S[OTr_R[\chi(t)]]. \quad (2.4)$$

Wenn wir $\rho(t) := Tr_R[\chi(t)]$ als die Dichtematrix des reduzierten Systems definieren so können wir das obige Ergebnis in der gewohnten Schreibweise ausdrücken:

$$\langle O \rangle = Tr_S[O\rho(t)], \quad (2.5a)$$

$$\rho(t) = Tr_R[\chi(t)]. \quad (2.5b)$$

Offensichtlich beinhaltet die reduzierte Dichtematrix $\rho(t)$ alle Information über das System. Unseres weiteres Vorgehen besteht nun darin eine Näherung für die Bewegungsgleichung der reduzierten Dichtematrix $\rho(t)$ anzugeben, welche alle für uns relevanten Informationen über das System beinhaltet.

Wir transformieren zunächst ins Wechselwirkungsbild. Dabei fassen wir H_{SR} in (2.1), den Kopplungsterm zwischen System und Umgebung, als kleine Störung auf. Die zeitliche Entwicklung des Zustandes im Wechselwirkungsbild ist alleinig durch diesen Störterm gegeben. Da wir ihn als klein annehmen ist dies ein guter Ausgangspunkt für notwendige Näherungen.

Für einen beliebigen Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ und beliebigen Operator $A(t)$ im Schrödingerbild, ist die Transformation definiert durch,

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{i(H_S+H_R)t} |\psi(t)\rangle, \quad (2.6a)$$

$$\tilde{A}(t) := e^{i(H_S+H_R)t} A(t) e^{-i(H_S+H_R)t}. \quad (2.6b)$$

Wir erhalten aus (2.3) die Liouville Gleichung im Wechselwirkungsbild,

$$\dot{\tilde{\chi}}(t) = -i \sum_j [\tilde{s}_j(t) \tilde{X}_j(t), \tilde{\chi}(t)]. \quad (2.7)$$

Als nächstes integrieren wir diese Gleichung formal ab dem Zeitpunkt des Einschaltens t_0 der Wechselwirkung. Wir setzen $t_0 = 0$ und erhalten,

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(0) - i \sum_j \int_0^t dt' [\tilde{s}_j(t') \tilde{X}_j(t'), \tilde{\chi}(t')], \quad (2.8a)$$

$$\chi(0) = \tilde{\chi}(0). \quad (2.8b)$$

Substituieren wir dieses Ergebnis in den ursprünglichen Ausdruck (2.7) zurück, so erhalten wir,

$$\dot{\tilde{\chi}}(t) = -i \sum_j [\tilde{s}_j(t) \tilde{X}_j(t), \chi(0)] - \sum_{ij} \int_0^t dt' [\tilde{s}_i(t) \tilde{X}_i(t), [\tilde{s}_j(t') \tilde{X}_j(t'), \tilde{\chi}(t')]]. \quad (2.9)$$

Verwenden wir nun noch (2.5b) um den entsprechenden Ausdruck für das reduzierte System zu erhalten,

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -i \sum_j Tr_R[\tilde{s}_j(t)\tilde{X}_j(t), \chi(0)] \quad (2.10a)$$

$$- \sum_{ij} \int_0^t dt' Tr_R[\tilde{s}_i(t)\tilde{X}_i(t), [\tilde{s}_j(t')\tilde{X}_j(t'), \tilde{\chi}(t')]],$$

$$Tr_R[\tilde{\chi}(t)] = e^{iH_S t} \rho(t) e^{-iH_S t} = \tilde{\rho}(t). \quad (2.10b)$$

Diese Integrodifferentialgleichung ist noch zu schwer um sie exakt zu lösen. Sie stellt aber einen guten Ausgangspunkt dar, um vernünftige Näherungen anzusetzen.

Im weiteren Vorgehen werden wir drei Näherungen vorstellen von denen wir die ersten zwei durchwegs in dieser Arbeit zur Analyse des Problems, Zwei-Niveau-System wechselwirkend mit dem Phasenqubit, verwenden werden.

Diese Näherungen lauten:

- Bornsche Näherung
- Markov Näherung
- Sekulare Näherung (auch: rotating wave approximation (RWA))

Bornsche Näherung

Wir schreiben für die Dichtematrix des zusammengesetzten Systems

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t)R_0 + O(H_{SR}), \quad t \geq 0, \quad (2.11a)$$

$$R_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H_R}{T}}, \quad Z = Tr_R[e^{-\frac{H_R}{T}}]. \quad (2.11b)$$

Wir nehmen also an, dass für alle Zeiten die Dichtematrix des zusammengesetzten Systems $\tilde{\chi}(t)$ sich schreiben lässt als Direktprodukt aus der Dichtematrix des reduzierten Systems $\tilde{\rho}(t)$ mit der Dichtematrix der Umgebung im thermischen Gleichgewicht R_0 . Weiterhin nehmen wir an, dass Abweichungen davon klein und linear in H_{SR} sind.

Diese Näherung ist vernünftig, da die Umgebung sehr viele Freiheitsgrade im Vergleich zu dem reduzierten System aufweist, daher sollte der Einfluss des Systems auf die Umgebung vernachlässigbar klein sein. Jedoch erwarten wir einen Einfluss der Umgebung auf unser System, natürlicherweise, da wir ein relaxierendes und dephasierendes System beschreiben wollen.

Ein Vergleich der Größenordnungen der relevanten Energien in unserem System untermauert diese Behauptung nochmals:

Bekanntlich gilt im thermischen Gleichgewicht nach dem Gleichverteilungssatz für die mittlere Energie pro Freiheitsgrad,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} T. \quad (2.12)$$

Und damit für ein Mol N mit $\sim 10^{23}$ Teilchen,

$$\langle E \rangle_N = \frac{1}{2} N T. \quad (2.13)$$

2. Bloch Redfield Formalismus

Damit ergibt sich bei einer für supraleitende Qubits typischen Arbeitstemperatur T von 35mK und einer Resonanzfrequenz ω_{01} , welche in der Größenordnung von etwa 10 GHz liegt, folgendes Verhältnis für die relevanten Energien,

$$\frac{\omega_{01}}{\langle E \rangle_N} \simeq 10^{-21}. \quad (2.14)$$

Wie diese Abschätzung also zeigt liegen die Größenordnungen weit auseinander. Der Einfluss des Qubits auf das Bad sollte demnach für seine makroskopischen Eigenschaften völlig vernachlässigbar sein.

Wir bemerken ferner, dass die Bornsche Näherung (2.11a) äquivalent zu einer Näherung in 2ter Ordnung in der Störung H_{SR} für die Bewegungsgleichung des reduzierten Systems ist. Wir können das leicht durch Einsetzen von (2.11a) in (2.10a) überprüfen.

Setzen wir also (2.11a) in (2.10a) ein, so ergibt sich,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}(t) = & -i \sum_j Tr_R[\tilde{s}_j(t)\tilde{X}_j(t), \rho(0)R_0] \\ & - \sum_{ij} \int_0^t dt' Tr_R[\tilde{s}_i(t)\tilde{X}_i(t), [\tilde{s}_j(t')\tilde{X}_j(t'), \tilde{\rho}(t')R_0]]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei verschwindet der erste Term, was immer der Fall ist sofern der thermische Mittelwert von X_i verschwindet. Andernfalls absorbieren wir $\sum_i s_i Tr_R[X_i R_0]$ in H_S .

Markov Näherung

Wir haben mit (2.15) eine in der Zeit nichtlokale Integralgleichung erhalten. In Markov Näherung machen wir die Gleichung lokal in der Zeit für $\tilde{\rho}$. Wir formen zunächst Gleichung (2.15) etwas um, um anschließend ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Näherung zu formulieren.

Dazu schreiben wir den Doppelkommutator in (2.15) aus, und erhalten,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}(t) = & - \sum_{ij} \int_0^t dt' \left[(\tilde{s}_i(t)\tilde{s}_j(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_j(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_i(t)) \cdot C_{X_i X_j}(t, t') \right. \\ & \left. + (\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_j(t')\tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_j(t')) \cdot C_{X_j X_i}(t', t) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$C_{X_i X_j}(t, t') := Tr_R[R_0 \tilde{X}_i(t) \tilde{X}_j(t')], \quad (2.17a)$$

$$C_{X_j X_i}(t', t) := Tr_R[R_0 \tilde{X}_j(t') \tilde{X}_i(t)]. \quad (2.17b)$$

Mit den Badkorrelationsfunktionen, $C_{X_i X_j}(t, t')$, $C_{X_j X_i}(t', t)$, die im thermischen Gleichgewicht, d.h. $[R_0, H_R] = 0$, nur von der relativen Zeitdifferenz abhängen, siehe Anhang A.2.2:

$$C_{X_i X_j}(t, t') = C_{X_i X_j}(t - t'), \quad (2.18a)$$

$$C_{X_j X_i}(t', t) = C_{X_j X_i}(t' - t). \quad (2.18b)$$

Diese Funktionen zerfallen auf einer Zeitskala τ_c , welche charakteristisch ist für das zu betrachtende Bad. Das bedeutet, dass innerhalb dieser Zeitskala im Mittel der Einfluss

einer Wechselwirkung noch im Bad gespeichert bleibt.

In Markov Näherung führen wir folgende Ersetzung unter dem Integral durch

$$\tilde{\rho}(t') \rightarrow \tilde{\rho}(t) \quad (2.19)$$

Wir fordern damit, dass die Entwicklung der Dichtematrix des reduzierten Systems nicht von seiner Vorgeschichte abhängt, insbesondere wird die Gleichung dadurch lokal in der Zeit für $\tilde{\rho}(t)$. Die Lösung der Bewegungsgleichung wird dadurch wesentlich vereinfacht. Führen wir diese Ersetzung in (2.16) durch, benützen die Zeittranslationsinvarianz der Badkorrelationsfunktionen (2.18) und dehnen die obere Integralgrenze nach unendlich aus. Schließlich verschwinden alle Beiträge oberhalb τ_c , so erhalten wir,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}(t) = \sum_{ij} \int_0^\infty dt'' \left[\left(\tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t-t'') \tilde{\rho}(t) - \tilde{s}_j(t-t'') \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_i(t) \right) \cdot C_{X_i X_j}(t'') \right. \\ \left. + \left(\tilde{\rho}(t) \tilde{s}_j(t-t'') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_j(t-t'') \right) \cdot C_{X_j X_i}(-t'') \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die Markov Näherung behält also dann ihre Gültigkeit, falls die Dichtematrix des reduzierten Systems $\tilde{\rho}(t)$ sehr langsam auf der Zeitskala τ_c variiert. Da wir jedoch an dem makroskopischen Verhalten unseres Systems interessiert sind, welches mit den Zeitskalen T_1 und T_2 verknüpft ist, muss im speziellen

$$\tau_c \ll T_1, T_2 \quad (2.21)$$

erfüllt sein.

Wir fassen damit die Ableitung unserer Dichtematrix als "grobe" Ableitung auf mit,

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) \rightarrow \frac{\Delta \tilde{\rho}(t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{\rho}(t + \Delta t) - \tilde{\rho}(t)}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

Dabei beschränken wir uns auf Zeitskalen Δt die viel größer als τ_c sind, der Einfachheit halber schreiben wir dennoch $\dot{\tilde{\rho}}(t)$ für die Ableitung, interessieren uns jedoch nicht für Zeitskalen sehr viel kleiner als τ_c .

Sekulare Näherung

Gleichung (2.20) beinhaltet über die Operatoren $s_i(t)$ implizit die Zeitentwicklung des ungestörten Systems H_S . Dies gibt uns Anlass für eine weitere Näherung. Dabei werden wir im Integral die Zeitskalen für die Entwicklung der Operatoren $s_i(t)$ mit den für uns relevanten Zeitskalen T_1, T_2 des reduzierten Systems $\tilde{\rho}(t)$ vergleichen. In der Konsequenz haben wir die Berechtigung schnell oszillierende Terme für hinreichend lange Zeiten zu vernachlässigen.

Um die Sekulare Näherung anzuwenden und das Erläuterte zu quantifizieren, projizieren wir zunächst die Gleichung (2.20) auf die Eigenzustände des ungestörten Systems,

$$H_S |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (2.23)$$

und erhalten nach einigen algebraischen Umformungen,

$$\langle m' | \dot{\tilde{\rho}}(t) | m \rangle = \sum_{n', n} \langle n' | \tilde{\rho}(t) | n \rangle R_{m' m n' n} \cdot e^{i(\omega_{m' m} - \omega_{n' n})t}. \quad (2.24)$$

2. Bloch Redfield Formalismus

Dabei ist $R_{m'mn'n}$ der Bloch Redfield Tensor, ein Tensor 4 Stufe, der gegeben ist durch,

$$R_{m'mn'n} := A_{nmm'n'} + A_{n'm'mn}^* - \sum_k (A_{m'kkn'} \delta_{mn} + A_{mkkn}^* \delta_{m'n'}), \quad (2.25a)$$

$$A_{abcd} := \sum_{i,j} \langle a | s_i | b \rangle \langle c | s_j | d \rangle \cdot \int_0^\infty dt'' e^{-i\omega_{cd}t''} C_{X_i X_j}(t''), \quad (2.25b)$$

mit,

$$\omega_{xy} := \omega_x - \omega_y, \quad (2.26)$$

den sogenannten Bohrfrequenzen.

Verwenden wir noch die Beziehung zwischen dem Realteil der Laplacetransformierten und der Fouriertransformierten der Badkorrelationsfunktion,

$$\text{Re} \left[\int_0^\infty dt'' e^{(-\sigma - i\omega_{cd})t''} C_{X_i X_j}(t'') \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dt'' e^{-i\omega_{cd}t''} C_{X_i X_j}(t''), \quad \sigma \rightarrow 0_+, \quad (2.27)$$

so erhalten wir unter Vernachlässigung des Imaginärteils der Laplacetransformierten,

$$A_{abcd} \simeq \sum_{i,j} \langle a | s_i | b \rangle \langle c | s_j | d \rangle \cdot \frac{1}{2} C_{X_i X_j}(\omega = \omega_{cd}). \quad (2.28)$$

Wir bemerken, dass der Bloch Redfield Tensor (2.25a) zeitunabhängig ist. Die einzige Zeitabhängigkeit in (2.24) rührt von den Exponentialfaktoren mit den Bohrfrequenzen her. Sind wir an den Relaxations- und Dephasierungseigenschaften, welche mit den Zeitskalen T_1, T_2 verknüpft sind, interessiert. So können wir (2.24) für

$$\omega_{ij} \gg T_1^{-1}, T_2^{-1}, \quad (2.29)$$

annähern durch,

$$\langle m' | \dot{\tilde{\rho}}(t) | m \rangle = \sum_{n',n}^{\text{sekular}} \langle n' | \tilde{\rho}(t) | n \rangle R_{m'mn'n}. \quad (2.30)$$

Dabei nehmen wir nur Terme mit, die folgende Gleichung erfüllen,

$$\omega_{m'm} - \omega_{n'n} = 0. \quad (2.31)$$

Alle anderen Einträge des Tensors verschwinden für hinreichend große Zeiten. Wir können vier Fälle unterscheiden die (2.31) erfüllen,

1. $m' = n', \quad m = n, \quad m' \neq m,$
2. $m' = m, \quad n' = n, \quad m' \neq n',$
3. $m' = m = n' = n,$

4. im Fall einer Entartung zwischen Energieabständen $\omega_{m'm} = \omega_{n'n}$ ("Liouvilleentartung"), nicht notwendigerweise 1.,2.,3..

Ein Beispiel stellt hier der harmonische Oszillator mit seinen äquidistanten Energieabständen zwischen den benachbarten Energieeigenzuständen dar.

Formen wir Gleichung (2.30) noch etwas um, um die anschließende Interpretation zu vereinfachen,

$$\langle m' | \dot{\tilde{\rho}}(t) | m \rangle = \delta_{m'm} \sum_{n \neq m} W_{mn} \langle n | \tilde{\rho}(t) | n \rangle - \gamma_{m'm} \langle m' | \tilde{\rho}(t) | m \rangle + \sum_{\omega_{m'm} - \omega_{n'n} = 0} R_{m'mn'n} \langle n' | \tilde{\rho}(t) | n \rangle, \quad (2.32)$$

mit,

$$W_{mn} := A_{nmmn} + A_{nmmn}^*, \quad (2.33a)$$

$$\gamma_{m'm} := \sum_k (A_{m'kkm'} + A_{m'kkm'}^*) - A_{mmm'm'} - A_{m'm'mm}^*, \quad (2.33b)$$

$$A_{abcd} = \sum_{i,j} \langle a | s_i | b \rangle \langle c | s_j | d \rangle \cdot \frac{1}{2} C_{X_i X_j}(\omega = \omega_{cd}). \quad (2.33c)$$

Rücktransformation ins Schrödingerbild und Interpretation der Bloch Redfield Gleichungen

Transformieren wir (2.32) zunächst ins Schrödingerbild zurück. Wir erhalten dabei einen zusätzlichen Term, welcher die Eigendynamik des ungestörten Systems beschreibt,

$$\begin{aligned} \langle m' | \dot{\rho}(t) | m \rangle &= -i \langle m' | [H_S, \rho(t)] | m \rangle + \delta_{m'm} \sum_{n \neq m} W_{mn} \langle n | \rho(t) | n \rangle - \gamma_{m'm} \langle m' | \rho(t) | m \rangle \\ &\quad + \sum_{\omega_{m'm} - \omega_{n'n} = 0} R_{m'mn'n} \langle n' | \rho(t) | n \rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Schauen wir uns die einzelnen Terme in (2.34) etwas genauer an (dabei schließen wir zunächst eine mögliche "Liouvilleentartung" aus):

- $-i \langle m' | [H_S, \rho(t)] | m \rangle = -i(\omega_{m'} - \omega_m) \langle m' | \rho(t) | m \rangle$

Diesen Term erhält man bei Rücktransformation vom Wechselwirkungsbild ins Schrödingerbild. Er beschreibt die zuvor im Wechselwirkungsbild unterdrückte Eigendynamik des ungestörten Systems

- $\delta_{m'm} \sum_{n \neq m} W_{mn} \langle n | \rho(t) | n \rangle$

- Nach Definition (2.33a) sind alle W_{mn} reell und stets positiv (Bochner Theorem [39]), weiterhin verknüpfen sie nur Diagonalelemente miteinander.

Schauen wir uns die Definition etwas genauer an so erhalten wir im Fall von verschiedenen und unabhängigen Bädern (verschwindende Kreuzkorrelationen unterhalb der Bäder),

$$W_{mn} \propto \frac{1}{2} \sum_i |\langle m | s_i | n \rangle|^2 \cdot C_{X_i X_i}(\omega = \omega_{mn}).$$

Wie wir im Anhang A.1 zeigen sind dies genau die Übergangsraten von den Zuständen n nach m welche man auch in Störungstheorie, Goldener Regel erhält.

2. Bloch Redfield Formalismus

- Wie wir ebenfalls im Anhang A.2.2 zeigen, können wir im thermischen Gleichgewicht eine wichtige Beziehung für Korrelationsfunktionen im Fourierraum herleiten. Diese besagt, dass Anregungen im Vergleich zu Abregungen induziert durch das Bad exponentiell unterdrückt sind,
 $C(-\omega) = C(\omega) \cdot e^{-\frac{\omega}{T}}$.

- $-\gamma_{m'm} \langle m' | \rho(t) | m \rangle$

- Nach Definition (2.33b) gilt $\gamma_{m'm} = \gamma_{mm'}^*$, und sind sie im Allgemeinen komplex.
- Ihr Realteil $\text{Re}[\gamma_{m'm}]$ gibt die jeweilige Dephasierungsrate $T_{2;m'm}^{-1}$ des Subsystems $m'm$ ($m' \neq m$) an, falls zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine Kohärenz schon vorlag. Dynamisch können hingegen keine Kohärenzen erzeugt werden, da in Sekular Näherung alle Diagonalelemente von allen Nichtdiagonalelementen entkoppelt sind. Der Imaginärteil von $\gamma_{m'm}$ kann als "Lambshift" der Eigenfrequenzen $\omega_{m'm}$ aufgefasst werden. Um konsistent mit der Sekularen Näherung zu bleiben sollte $|\text{Im}[\gamma_{m'm}]| \ll |\omega_{m'm}|$ sein.

- $\sum_{\omega_{m'm} - \omega_{n'n} = 0} R_{m'mn'n} \langle n' | \rho(t) | n \rangle$

Der Beitrag dieses Termes ergibt sich nur im Fall der Liouvilleentartung, dabei werden Nebendiagonalelemente entarteter Subsysteme miteinander verknüpft.

Betrachten wir die Gleichungen für die Diagonalelemente in (2.34) noch etwas genauer. Wir können leicht zeigen, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit erhalten bleibt. Denn dafür muss gelten,

$$\sum_m \langle m | \dot{\rho}(t) | m \rangle = \sum_n \left(\sum_m R_{mmnn} \right) \langle n | \rho(t) | n \rangle \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.35)$$

Und da i.A. $\langle n | \rho(t) | n \rangle \neq 0$ ist,

$$\sum_m R_{mmnn} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.36)$$

Schauen wir uns die entsprechenden Bloch Redfield Tensoreinträge (2.33a), (2.33b) dazu an, so können wir (2.36) leicht verifizieren,

$$\sum_m R_{mmnn} = -\gamma_{nn} + \sum_{m \neq n} W_{mn} = 0. \quad (2.37)$$

Da die W_{mn} Transmissionswahrscheinlichkeiten darstellen, weiterhin die Gesamtwahrscheinlichkeit einen Zustand in irgendeinem Level vorzufinden erhalten bleibt, erhalten wir in Bloch Redfield Näherung Mastergleichungen für die Diagonalelemente.

Machen wir abschließend ein Beispiel für den Fall eines drei-dimensionalen Systems $\dim(H_S) = 3$ um die Struktur der Bloch Redfield Gleichungen eindrücklich zu sehen:

Dazu schreiben wir zunächst die Bloch Redfield Gleichungen (2.34) als Matrixgleichung um. Dabei sortieren wir zur besseren Übersicht alle Diagonalelemente der Dichtematrix in die ersten Zeilen gefolgt von allen Nichtdiagonalelementen. Die Bloch Redfield Gleichungen lassen sich damit wie folgt darstellen,

$$\dot{\vec{\rho}}(t) = \mathcal{L}_{m'm, n'n}^{9 \times 9} \vec{\rho}(t), \quad (2.38)$$

mit der $\dim(H_S)^2 = 9$ - dimensionalen Liouville Matrix,

$$\mathcal{L}_{m'm,n'n}^{9 \times 9} := -i \langle m' | [H_S, \rho(t)] | m \rangle \delta_{m'm,n'n} + R_{m'm,n'n}^{9 \times 9}. \quad (2.39)$$

Wir sehen die 9-dimensionalen Liouville Matrix in Abbildung 2.1 mit den entsprechenden Einträgen aus (2.33).

$$\begin{pmatrix} -(W_{21} + W_{31}) & W_{12} & W_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_{21} & -(W_{12} + W_{32}) & W_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_{31} & W_{32} & -(W_{13} + W_{23}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{12} - i(\omega_1 - \omega_2) & 0 & 0 & R_{1223} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{13} - i(\omega_1 - \omega_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{21} - i(\omega_2 - \omega_1) & 0 & 0 & R_{2132} \\ 0 & 0 & 0 & R_{2312} & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{23} - i(\omega_2 - \omega_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{31} - i(\omega_3 - \omega_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{3221} & 0 & 0 & -\gamma_{32} - i(\omega_3 - \omega_2) \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.1.: Liouville Matrix für $\dim(H_S) = 3$ in Sekularer Näherung: linke obere Blockmatrix enthält die Übergangsraten aus (2.33a) und formt damit die Mastergleichung; rechts unten die Diagonalmatrix für die Nebendiagonalelemente aus (2.33b) und den jeweiligen Phasen aus der Zeitentwicklung des ungestörten Systems H_S (3.14); die Einträge $R_{1223}, R_{2132}, R_{2312}$ und R_{3221} ergeben sich nur im Falle der ‘‘Liouvilleentartung‘‘.

Die Einträge $R_{1223}, R_{2132}, R_{2312}$ und R_{3221} sind nur im Falle einer Entartung der Energien $\omega_{32} = \omega_{21}$ mit einzubeziehen (‘‘Liouvilleentartung‘‘).

Fassen wir kurz zusammen was wir im Wesentlichen nun erreicht haben. Zu allererst haben wir die Bornsche Näherung verwendet. Dabei nehmen wir an, dass der Einfluss der Umgebung auf das System sehr klein ist (schwaches Rauschen) und die Umgebung eine sehr große Anzahl an Freiheitsgraden besitzt. In der Konsequenz faktorisieren die Dichtematrizen. Dies drückt den Umstand der Irreversibilität in der Entwicklung der Dichtematrix des reduzierten System aus. Ferner haben wir erreicht, dass der gesamte Einfluss der Umgebung auf das reduzierte System sich in den Gleichgewichtsbadkorrelationsfunktionen manifestiert. In Markov Näherung nehmen wir zusätzlich ein kurz korreliertes Rauschen an, was uns die Lösung der Gleichungen wesentlich vereinfacht, da wir nun Differentialgleichungen 1-Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten haben. In Sekularer Näherung vernachlässigen wir dann alle auf der Zeitskala der Relaxations- T_1 und Dephasierungszeit T_2 schnell oszillierenden Terme. Dadurch erreichen wir eine Entkopplung aller Diagonalelemente von allen Nichtdiagonalelementen der Dichtematrix des reduzierten Systems. Dies führte uns zu den Mastergleichungen für die Diagonalelemente und Lösungen der Nebendiagonalelemente in Form von abfallenden Exponentialfunktionen. Deren charakteristische Abklingzeit ist durch die Dephasierungszeit T_2 des jeweiligen Subsysteme gegeben. Für die Gültigkeit der genannten Näherungen haben wir ein schwaches, kurz korreliertes Rauschen vorausgesetzt, so dass gelten muss: $T_1^{-1}, T_2^{-1} \ll \omega_{mn}, \frac{1}{\tau_c}$.

3. Das Modell

In diesem Kapitel stellen wir das grundsätzliche Modell: Dissipatives Zwei-Niveau-System (Fluktuator) wechselwirkend mit einem dissipativen Phasenqubit (im Folgenden abgekürzt als “n-Level-Qubit“) vor. Dabei stellen wir zunächst die die Dynamik des Systems charakterisierenden Hamiltonians vor. Als Beschreibungsgrundlage dient uns der in Kapitel 2 eingeführte Bloch Redfield Formalismus, in dem wir unser System und Bad insbesondere deren Wechselwirkungsterme untereinander weiter spezifizieren. Das hier beschriebene Modell ist die Grundlage für alle in dieser Arbeit betrachteten Eigenschaften und Aspekte des Systems.

3.1. Gesamthamiltonian

Wie bereits aus dem Kapitel Bloch Redfield Formalismus 2 bekannt, sollten wir, da wir uns für Relaxationsprozesse in unserem System interessieren, in geeigneter Weise eine Kopplung des Systems an seine Umwelt in Betracht ziehen. Der erste Schritt dazu stellt die Aufteilung des Gesamthamiltonoperators in drei Teile dar,

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (3.1)$$

- H_S : Hamiltonoperator des Systems,
- H_R : Hamiltonoperator der Umgebung,
- H_{SR} : Wechselwirkungsoperator zwischen System und Umgebung.

Im weiteren Vorgehen spezifizieren wir die einzelnen Hamiltonians für das uns vorliegende Problem eines n-level-Qubits wechselwirkend mit einem Fluktuator.

3.1.1. Hamiltonoperator des Systems

Unser System besteht aus zwei kohärent aneinander gekoppelten Subsystemen, zum einen das n-Level-Qubit zum anderen der Fluktuator.

Wir teilen damit unseren Systemhamiltonian H_S in drei Teile auf:

$$H_S = H_Q + H_F + H_{WW}^{QF} \quad (3.2)$$

- H_Q : Hamiltonoperator des n-Level-Qubits
- H_F : Hamiltonoperator des Fluktuators
- H_{WW}^{QF} : Wechselwirkungsoperator zwischen n-Level-Qubit und Fluktuator

3. Das Modell

Im Folgenden gehen wir auf die einzelnen Hamiltonians H_Q , H_F und H_{WW}^{QF} näher ein, wobei wir die einzelnen Hamiltonians in ihrer jeweiligen Eigenbasis darstellen.

Hamiltonoperator des n-Level-Qubits

Wir führen einen effektiven Modell-Hamiltonian H_Q zur Beschreibung des Phasenqubits ein. Dieser stellt, wie wir in Kapitel 5.5 zeigen werden, für kleine Potentialmulden eine gute Näherung für das Potential aus (1.2) dar.

Dieser wird sich in Kapitel 5 als nützlich für die Analyse des allgemeinen Relaxationszeitverhaltens des Fluktuators erweisen.

Der effektive Hamiltonian H_Q schreibt sich wie folgt,

$$\begin{aligned} H_Q &= \omega_s \sum_{s=0}^{n-1} |s\rangle \langle s| \\ &\equiv \sum_{s=0}^{n-1} s \left(\omega_{01} - \frac{s-1}{2} \Delta \right) |s\rangle \langle s|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei stellt ω_{01} den Energieunterschied zwischen dem 1-ten und 0-ten Level dar. $\Delta > 0$ nennen wir den Asymmetrieparameter, seine Bedeutung wird im Weiteren näher erläutert. Wie Eingangs 1 bereits erwähnt wurde, ist die Asymmetrie benachbarter Zustände notwendig für die Reduktion eines allgemeinen Mehr-Niveau-Systems auf ein Qubit (2-Niveau-System) [10].

Machen wir ein Beispiel für den Fall $n=5$ um die obige Struktur besser zu verstehen,

$$H_Q = 0 |0\rangle \langle 0| + \omega_{01} |1\rangle \langle 1| + (2\omega_{01} - \Delta) |2\rangle \langle 2| + (3\omega_{01} - 3\Delta) |3\rangle \langle 3| + (4\omega_{01} - 6\Delta) |4\rangle \langle 4|. \quad (3.4)$$

Der Energieabstand benachbarter Levels beträgt nach 3.3

$$\omega_s - \omega_{s-1} = \omega_{01} - (s-1)\Delta, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.5)$$

Damit berechnen wir den Energieunterschied benachbarter Levelpaare,

$$(\omega_{s+1} - \omega_s) - (\omega_s - \omega_{s-1}) = -\Delta, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.6)$$

Der Energieunterschied benachbarter Levelpaare nimmt also stetig um den Betrag Δ ab.

Bemerken wir ferner, dass

$$(s-1)\Delta \geq 0, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.7)$$

So erhalten wir aus (3.5) für gegebenes ω_{01} und Δ , falls wir die energetische Reihenfolge mit steigendem s garantieren wollen, eine Einschränkung für die Wahl von n_{max} ,

$$\omega_{01} - \Delta(n_{max} - 2) \stackrel{!}{\geq} 0, \quad (3.8a)$$

$$\frac{\omega_{01}}{\Delta} + 2 \stackrel{!}{\geq} n_{max}. \quad (3.8b)$$

Machen wir dazu eine Abschätzung:

Ein realistischer Wert für das Verhältnis im Phasenqubitmuldenpotential liegt bei etwa $\frac{\omega_{01}}{\Delta} = 10^2$. Mit diesem Wert erhalten wir aus (3.8b) für den "maximalen Levelwert" $n_{max} = 102$.

Dieser Wert liegt jedoch weit überhalb dem der für die Anwendung des Phasenqubits als 2-Niveau-System sinnvoll ist [11]. Der Wert für typische Anwendungen liegt meist in der Größenordnung von $n \sim 5$ [29], die Näherung muss folglich ohnehin nicht auf solch hohe Qubitlevels zutreffen.

Hamiltonoperator des Fluktuators

In der Eigenbasis des Fluktuators lautet der Hamiltonian,

$$H_F = -\frac{1}{2}\omega_f\tau_z + \frac{1}{2}\omega_f\mathbf{1}. \quad (3.9)$$

Dabei ist τ_z die diagonale Paulimatrix. ω_f entspricht dem Energieabstand der zwei Eigenenergien des Fluktuators. Wie wir Eingangs 1 bemerkt haben kann diese Konstante aus spektroskopischen Daten ("Qubitspektroskopie") gewonnen werden [17]. O.B.d.A. messen wir, wie schon im Falle des n-Level-Qubits, die Energien vom Grundzustand aus, daher noch der zusätzliche Term $\frac{1}{2}\omega_f\mathbf{1}$.

Der Grund dafür liegt in der einfacheren Sortierung der Eigenenergien des Systems in Bezug auf die Größe mit dem von uns verwendeten Computeralgebrasystem "Mathematica 7.0.1". Dadurch erreichen wir, dass alle Eigenenergien positiv sind und eine Sortierung nach Absolutwerten der Eigenenergien dessen energetische Reihenfolge richtig wiedergibt.

Wechselwirkungsoperator zwischen n-Level-Qubit und Fluktuator

Wir schreiben folgenden Wechselwirkungshamiltonian,

$$H_{WW}^{QF} = \frac{1}{2}v \cdot \hat{p} \cdot \tau_x, \quad (3.10a)$$

$$\hat{p} = i(a^\dagger - a). \quad (3.10b)$$

Dabei ist τ_x die nichtdiagonale Paulimatrix in x-Richtung. Sie stellt einen transversalen Operator des Fluktuators dar. \hat{p} ist hingegen der in der Eigenbasis des n-Level-Qubits vollständige transversale "Impulsoperator", dessen Wirkung auf die Auf- und Absteigeoperatoren a^\dagger , a zurückzuführen ist.

Sei dazu $|s\rangle$ ein Zustand des n-Level-Qubits, so erhalten wir,

$$H_Q |s\rangle = \omega_s |s\rangle, \quad (3.11a)$$

$$a^\dagger |s\rangle = \sqrt{s+1} |s+1\rangle, \quad (3.11b)$$

$$a |s\rangle = \sqrt{s} |s-1\rangle. \quad (3.11c)$$

3. Das Modell

Die Kopplung zwischen den beiden Subsysteme n-Level-Qubit und Fluktuator ist also rein transversal $\propto i(a^\dagger - a) \cdot \tau_x$. Allgemein könnten wir jede beliebige Kombination von longitudinalen und transversalen Operatoren des n-Level-Qubits bzw. Fluktuators ansetzen. Eine endliche transversale Kopplung steht jedoch in sehr guter Übereinstimmung mit den Experimenten, da eine solche Kopplung genau das resonante Wechselwirkungsverhalten wiedergibt [18]. So insbesondere die Energieaufspaltung in der Qubitspektroskopie [17]. Wir bemerken ferner, dass ein rein longitudinaler Wechselwirkungsoperator $\propto a^\dagger a \cdot \tau_z$ lediglich eine Energieverschiebung der Eigenwerte bewirken würde. Als Konsequenz erhält man im Falle eines Qubits kohärent gekoppelt an einen Fluktuator eine Verschiebung der mittleren Linie (Zwei-Photonenübergang) in den spektroskopischen Daten, welche experimentell für das Phasenqubit als sehr klein befunden wird [20].

Des Weiteren wird eine solche Kopplung für eine elektrische Dipolkopplung in Phasen- und Flussqubits ausgeschlossen, da eine solche Kopplung zwangsweise zu einem mittleren elektrischen Feld (Spannung) über der Josephson Tunnelbarriere führen würde [19], [25].

3.1.2. Diagonalisierung des Systemhamiltonians

Fassen wir zunächst alle Teilhamiltonians des Systems zusammen,

$$H_S = H_Q + H_F + H_{WW}^{QF}, \quad (3.12)$$

mit,

$$H_Q = \sum_{s=0}^{n-1} s \left(\omega_{01} - \frac{s-1}{2} \Delta \right) |s\rangle \langle s|, \quad (3.13a)$$

$$H_F = -\frac{1}{2} \omega_f \tau_z + \frac{1}{2} \omega_f \mathbf{1}, \quad (3.13b)$$

$$H_{WW}^{QF} = \frac{1}{2} v \cdot \hat{p} \cdot \tau_x. \quad (3.13c)$$

Wie wir im Folgenden sehen werden, reduziert sich das Problem auf eine Diagonalisierung von $n-1$ 2×2 -Untermatrizen, deren zwei Eigenvektoren wir durch einen Winkel θ_i für jedes Untersystem parametrisieren können. Dieser Winkel stellt gleichzeitig ein Maß für die Stärke der Hybridisierung in den Unterräumen dar.

Für verschwindende Wechselwirkung $v = 0$ sind die Eigenzustände des Systemhamiltonians H_S die Direktprodukte der Eigenzustände der Subsysteme,

$$|s, \uparrow\rangle = |s\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad (3.14)$$

mit,

$$H_Q |s\rangle = \omega_s |s\rangle, \quad (3.15a)$$

$$H_F |\uparrow\rangle = \omega_f |\uparrow\rangle, \quad (3.15b)$$

$$H_F |\downarrow\rangle = 0 |\downarrow\rangle. \quad (3.15c)$$

Betrachten wir nun eine endliche Kopplung $v > 0$. Die einzigen nichtverschwindenden Matrixelemente des Wechselwirkungshamiltonian H_{WW}^{QF} in der Basis Direktprodukte Gl.:

(3.14) sind die Folgenden,

$$\langle s-1, \uparrow | H_{WW}^{QF} | s, \downarrow \rangle, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (3.16a)$$

$$\langle s, \uparrow | H_{WW}^{QF} | s-1, \downarrow \rangle, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.16b)$$

Das heist wir erwarten eine direkte Kopplung zwischen,

$$|s-1, \uparrow\rangle \circlearrowleft |s, \downarrow\rangle, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (3.17a)$$

$$|s, \uparrow\rangle \circlearrowleft |s-1, \downarrow\rangle, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.17b)$$

Wir werden im Folgenden durch Transformation in das Wechselwirkungsbild zeigen, dass die Kopplungsterme welche (3.17b) miteinander mischen, etwa mit der doppelten Frequenz $\sim (\omega_f + \omega_{01}) + O(-\Delta)$ oszillieren. Selbst für hoch energetische Zustände des Qubits $s \gg 1$ bleibt diese Aussage gültig, sofern wir $\Delta \ll \omega_{01}$ voraussetzen und die Verstimmung $\delta\omega = \omega_f - \omega_{01}$ klein gegenüber $(\omega_f + \omega_{01})$ halten. Diese schnell oszillierenden Terme setzen wir zu Null (“Rotating Wave Approximation (RWA)”), d.h. wir interessieren uns nur für Zeitspannen, die sehr groß gegenüber Zeitspannen sind, welche durch die inversen Bohrfrequenzen gegeben sind.

Wir beschränken uns somit auf Kopplungen welche (3.17a) mischen, und vernachlässigen solche aus (3.17b).

Wir hatten in Kapitel 2 schon einmal diese Näherung (Sekulare Näherung) in einem anderen Zusammenhang verwendet. Da wir aber auch dort alle oszillierenden Terme mit Frequenzen in der Größenordnung der Bohrfrequenzen vernachlässigt haben, produzieren wir mit dieser hier gemachten Näherung keinen weiteren Fehler.

Machen wir ein Beispiel für den Fall $n = 3$ um den Sachverhalt besser zu verdeutlichen:

In der Produktzustandsbasis aus den Eigenbasen des Qubits sowie des Fluktuators stellt sich der Wechselwirkungshamiltonian H_{WW}^{QF} wie folgt dar,

$$H_{WW}^{QF} = \frac{1}{2} v i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Transformieren wir Gl.: 3.18 ins Wechselwirkungsbild,

$$\tilde{H}_{WW}^{QF} = e^{i(H_Q + H_F)t} H_{WW}^{QF} e^{-i(H_Q + H_F)t},$$

so erhalten wir,

$$\tilde{H}_{WW}^{QF} =$$

3. Das Modell

$$\frac{1}{2}v i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -e^{-i(\omega_0+\omega_f)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\delta\omega t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta\omega t} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}e^{-i(\omega_0-\Delta+\omega_f)t} \\ e^{i(\omega_0+\omega_f)t} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}e^{i(\delta\omega+\Delta)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e^{-i(\delta\omega+\Delta)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}e^{i(\omega_0-\Delta+\omega_f)t} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

In ‘‘Rotating Wave Approximation’’ vernachlässigen wir alle schnell oszillierenden Terme, d.h. wir schreiben,

$$\tilde{H}_{WW}^{QF,RWA} = \frac{1}{2}v i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\delta\omega t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta\omega t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}e^{i(\delta\omega+\Delta)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e^{-i(\delta\omega+\Delta)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

Transformieren wir wieder zurück, so erhalten wir,

$$H_{WW}^{QF,RWA} = \frac{1}{2}v i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Als Resultat bekommen wir zwei voneinander getrennte zwei-dimensionale Unterräume deren Diagonalisierung wir durch zwei Parametrisierungswinkel θ_1 und θ_2 beschreiben können. Im Folgenden lassen wir das Kürzel ‘‘RWA’’ an der Kopplung wieder weg.

Abbildung 3.1 illustriert das Gesagte am Beispiel des 3-Level-Qubit gekoppelt an einen Fluktuator.

Wir sehen links die Energieeigenzustände für verschwindende Wechselwirkung $v = 0$, sowie für endliche Wechselwirkung $v > 0$ rechts. Die Zustände $|2, \downarrow\rangle$ und $|1, \uparrow\rangle$, respektive $|1, \downarrow\rangle$ und $|0, \uparrow\rangle$, hybridisieren für $v > 0$ und bilden die neuen Eigenzustände:

$$|1+\rangle := -i \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0, \uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1, \downarrow\rangle, \quad (3.22a)$$

$$|1-\rangle := i \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0, \uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1, \downarrow\rangle, \quad (3.22b)$$

mit,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad (3.23)$$

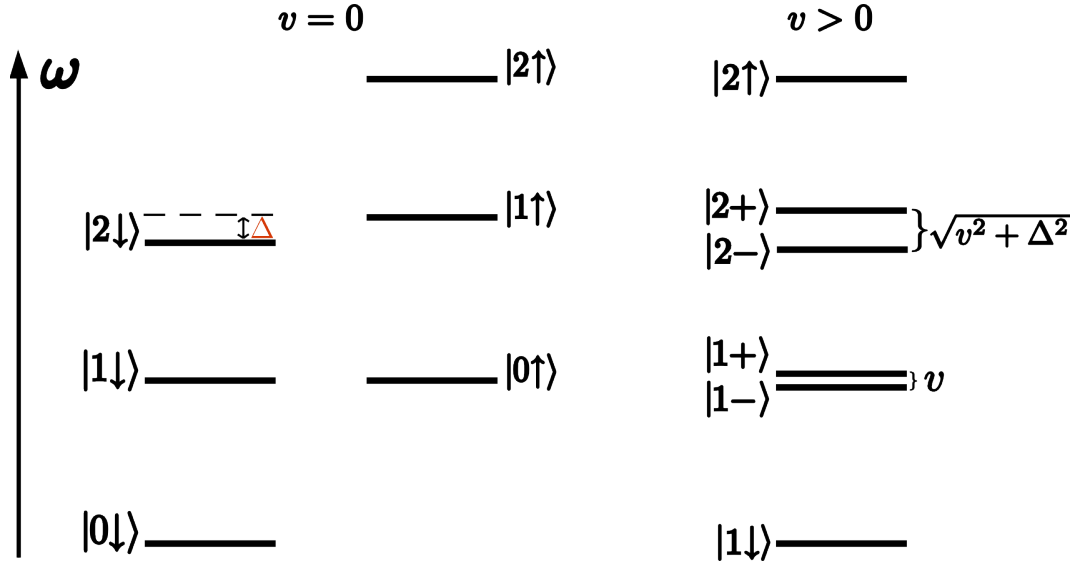


Abbildung 3.1.: Levelstruktur des gekoppelten Systems 3-Level-Qubit-Fluktuator für $\delta\omega = 0$. links: Eigenzustände für $v = 0$; rechts: Eigenzustände für $v > 0$. Kopplung zwischen den Zuständen $|2, \downarrow\rangle$ und $|1, \uparrow\rangle$ respektive $|1, \downarrow\rangle$ und $|0, \uparrow\rangle$ führt zu einer Energieaufspaltung, siehe Text.

und einer Energieaufspaltung von,

$$E_{1+} - E_{1-} = v. \quad (3.24)$$

Bzw.:

$$|2+\rangle := -i \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |1, \uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |2, \downarrow\rangle, \quad (3.25a)$$

$$|2-\rangle := i \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |1, \uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |2, \downarrow\rangle, \quad (3.25b)$$

mit,

$$\tan(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}v}{\Delta}, \quad (3.26)$$

und einer Energieaufspaltung von,

$$E_{2+} - E_{2-} = \sqrt{v^2 + \Delta^2}. \quad (3.27)$$

Der Grundzustand $|0, \downarrow\rangle$ sowie der energetisch höchste Zustand $|2, \uparrow\rangle$ bleiben in "RWA" auch für endliche Kopplung $v > 0$ Eigenzustände von H_S .

Das System lässt sich leicht auf den allgemeinen Fall des n-Level-Qubits gekoppelt an den Fluktuator verallgemeinern.

Der höchste sowie der niedrigste Energiezustand bleiben durch die Kopplung unbeeinflusst,

$$H_S |0, \downarrow\rangle = 0 |0, \downarrow\rangle, \quad (3.28a)$$

$$H_S |n-1, \uparrow\rangle = (\omega_{n-1} + \omega_f) |n-1, \uparrow\rangle. \quad (3.28b)$$

3. Das Modell

Für alle $n - 1$ zwei-dimensionalen Unterräume, wir indizieren sie mit $s \in (1, \dots, n - 1)$, erhalten wir folgende Eigenzustände,

$$|s+\rangle := -i \cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right) |s-1, \uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right) |s, \downarrow\rangle, \quad (3.29a)$$

$$|s-\rangle := i \sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right) |s-1, \uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right) |s, \downarrow\rangle, \quad (3.29b)$$

mit den Parametrisierungswinkeln,

$$\begin{aligned} \tan(\theta_s) &= \frac{2 |H_{S,i,i+1}|}{H_{S,i,i} - H_{S,i+1,i+1}}, \\ &= \frac{\sqrt{sv}}{\delta\omega + (s-1)\Delta}, \quad 0 \leq \theta_s < \pi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Hierbei bezeichnet $H_{S,k,l}$ das Matrixelement der jeweiligen Unterräume in der Produktzustandsbasis. Für die Eigenenergien erhalten wir,

$$E_{s+} = \frac{1}{2}(H_{S,i,i} + H_{S,i+1,i+1}) + \frac{1}{2}\sqrt{(H_{S,i,i} - H_{S,i+1,i+1})^2 + 4 |H_{S,i,i+1}|^2}, \quad (3.31a)$$

$$E_{s-} = \frac{1}{2}(H_{S,i,i} + H_{S,i+1,i+1}) - \frac{1}{2}\sqrt{(H_{S,i,i} - H_{S,i+1,i+1})^2 + 4 |H_{S,i,i+1}|^2}. \quad (3.31b)$$

Die Parametrisierungswinkel θ_s in Gleichung (3.30) stellen, wie zuvor erwähnt, ein Maß für den Grad der Hybridisierung der Zustände in (3.29) dar. Wir entnehmen ihr, dass die Hybridisierung proportional dem Verhältnis aus der Kopplungsstärke zur jeweiligen Verstimmung ist. Dieser Sachverhalt wird noch eine große Rolle in der weiteren Analyse unseres Problems spielen.

3.1.3. Hamiltonoperator der Umgebung/ Wechselwirkungsoperator zwischen System und Umgebung

Wir beschränken uns in Bloch Redfield Näherung auf eine in den Operatoren lineare Kopplung zwischen System und Umgebung. Weiterhin sind wir in dieser Arbeit an den Relaxationseigenschaften unseres Systems interessiert. Um die wesentlichen Eigenschaften des Relaxationszeitverhaltens in Abhängigkeit von der Verstimmung $\delta\omega$ zwischen n-Level-Qubit und Fluktuator zu erhalten genügt es jeweils eine transversale Kopplung des n-Level-Qubits, sowie des Fluktuators an die Umgebungen anzunehmen. Wir werden im nächsten Abschnitt 3.2 den Einfluss einer longitudinalen Kopplung kurz diskutieren.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall von verschiedenen und unabhängigen Umgebungen, d.h. alle Kreuzkorrelationen zwischen den Umgebungen seien verschwindend,

$$C_{X_1 X_2}(\omega) = C_{X_2 X_1}(\omega) = 0. \quad (3.32)$$

Die Kopplungsterme zu den Umgebungen lauten damit,

$$H_{SR} = \frac{1}{2}\beta_{1,t}\hat{p}X_{1,t} + \frac{1}{2}\beta_{2,t}\tau_x X_{2,t}. \quad (3.33)$$

Dabei sind $\beta_{i,t}$ die Kopplungsstärken der Subsysteme an die jeweilige Umgebung. \hat{p} und τ_x sind die uns schon bekannten transversalen Operatoren der Subsysteme, $X_{i,t}$ sind hingegen Operatoren der Umgebung.

Wie bereits erwähnt, werden die Umgebungen in Bloch Redfield Näherung hinreichend über deren Gleichgewichtskorrelationsfunktionen und deren Kopplungsstärke $\beta_{i,t}$ an das System beschrieben.

Für die weitere Diskussion definieren wir die symmetrisierte $S_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega)$ und die antisymmetrisierte Korrelationsfunktion $A_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega)$ durch,

$$S_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) := \frac{1}{2}(C_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) + C_{X_{i,t}X_{i,t}}(-\omega)), \quad (3.34a)$$

$$A_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) := \frac{1}{2}(C_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) - C_{X_{i,t}X_{i,t}}(-\omega)). \quad (3.34b)$$

Im Anhang A.2 leiten wir folgende wichtige Beziehung zwischen der symmetrisierten und antisymmetrisierten Korrelationsfunktion her,

$$S_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) = A_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right). \quad (3.35)$$

Diese ist auch unter dem Begriff Fluktuations-Dissipations-Theorem bekannt. Mit Hilfe dieser Beziehung und Gl.: (3.34) erhalten wir,

$$C_{X_{i,t}X_{i,t}}(\omega) = A_{X_{i,t}X_{i,t}} \left[1 + \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right], \quad \omega > 0, \quad (3.36a)$$

$$C_{X_{i,t}X_{i,t}}(-\omega) = A_{X_{i,t}X_{i,t}} \left[-1 + \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right], \quad \omega > 0. \quad (3.36b)$$

Für eine Umgebung aus harmonischen Oszillatoren können wir die antisymmetrisierte Korrelationsfunktion angeben durch, [38, 40]

$$A_{X_{i,t}X_{i,t}}^{harm} = \alpha_{X_{i,t}} \cdot \omega, \quad \alpha_{X_{i,t}} > 0. \quad (3.37)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft von $A_{X_{i,t}X_{i,t}}^{harm}$ können wir die Gleichungen (3.36) auch kompakt angeben durch,

$$C_{X_{i,t}X_{i,t}}^{harm}(\omega) = \alpha_{X_{i,t}} \cdot \omega \left[1 + \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right], \quad \forall \omega. \quad (3.38)$$

Um konsistent in Bloch Redfield Näherung zu sein, müssen wir für die dimensionslose Größe $\alpha_{X_{i,t}}$, welche ein Maß für die Stärke der Dissipation darstellt, noch $\alpha_{X_{i,t}} \ll 1$ voraussetzen [38]. Gleichung 3.38 beinhaltet die ganze Information über das Bad welche wir in Bloch Redfield Näherung benötigen. So beinhaltet sie insbesondere den spezifischen Temperaturzusammenhang der Übergangsraten $W_{m'm;i} \propto C_{X_{i,t}X_{i,t}}^{harm}$ mit der Temperatur T .

Abbildung 3.2 zeigt die durch die Umgebungen induzierten Übergangsraten für das Beispiel eines 3-Level-Qubits gekoppelt an einen Fluktuator bei $T = 0$.

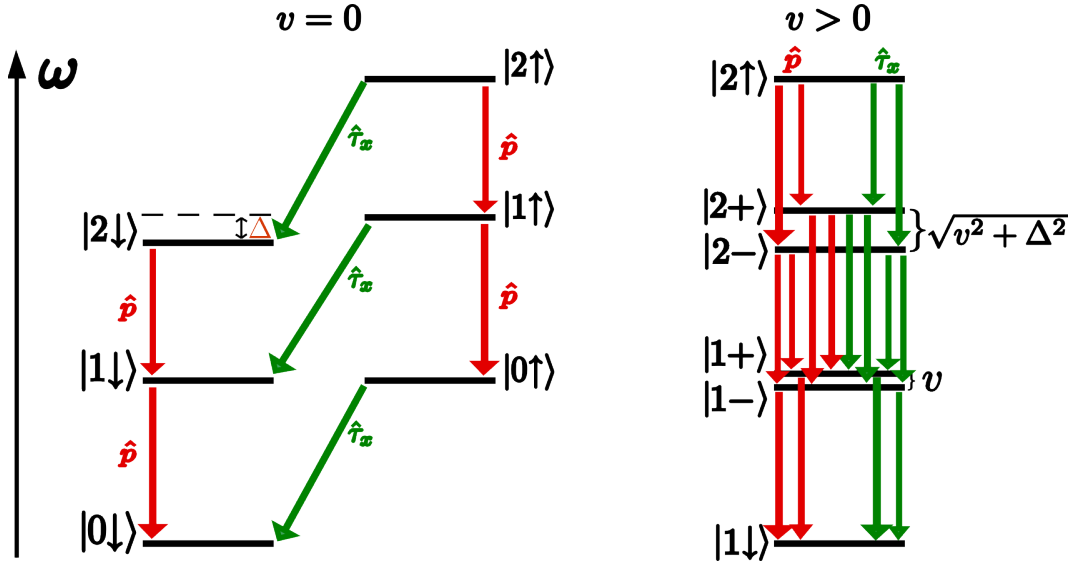


Abbildung 3.2.: Levelstruktur des gekoppelten Systems 3-Level-Qubit-Fluktuator für $\delta\omega = 0$ mit eingezeichneten Übergängen induziert durch die transversalen Ankopplungen an die Umgebungen bei $T = 0$. links: Eigenzustände für $v = 0$; rechts: Eigenzustände für $v > 0$. Rote Pfeile verdeutlichen die Übergangsraten aufgrund der Ankopplung des 3-Level-Qubits an die Umgebung, respektive grüne Pfeile die Übergangsraten aufgrund der Ankopplung des Fluktuators an die Umgebung.

Die roten Pfeile zeigen die Übergänge aufgrund der Ankopplung des 3-Level-Qubits an die Umgebung, die Grünen hingegen die aufgrund der Ankopplung des Fluktuators an die Umgebung. Für endliche Temperaturen $T > 0$ erhalten wir zusätzlich Anregungsraten zwischen den gleichen Zuständen, jedoch in ihrer Stärke mit dem thermischen Exponentialfaktor unterdrückt, siehe Anhang A.2.2.

3.2. Einfluss einer longitudinalen Kopplung an die Umgebung

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass eine rein longitudinale Kopplung zu den Bädern die Relaxationseigenschaften des Fluktuators nicht beschreiben kann.

Der Wechselwirkungshamiltonian H_{SR} zwischen den Subsystemen und ihren jeweiligen Umgebungen schreibt sich wie folgt,

$$H_{SR} = \frac{1}{2}\beta_{1,l}a^\dagger a X_{1,l} + \frac{1}{2}\beta_{2,l}\tau_z X_{2,l}. \quad (3.39)$$

Die Operatoren $a^\dagger a$ und τ_z sind dabei longitudinale Operatoren in den jeweiligen Eigenzuständen des n-Level-Qubits sowie des Fluktuators,

$$a^\dagger a |s\rangle = s |s\rangle, \quad (3.40a)$$

$$\tau_z |\uparrow\rangle = +1 |\uparrow\rangle, \quad (3.40b)$$

$$\tau_z |\downarrow\rangle = -1 |\downarrow\rangle. \quad (3.40c)$$

3.2. Einfluss einer longitudinalen Kopplung an die Umgebung

Ihre Matrixelemente sind also nur zwischen gleichen Eigenzuständen von Null verschieden. Folglich sind auch ihre Matrixelemente in der aus den Zuständen (3.40) gebildeten Produktzustandsbasis (3.14) nur zwischen gleichen Produktzuständen von Null verschieden sind. In der Eigenbasis von H_S bedeutet dies, dass Übergänge, induziert durch (3.39), nur zwischen den hybridisierten Zuständen: (3.29a) und (3.29b), stattfinden können. Eine longitudinale Kopplung an die Bäder kann deswegen nicht zu einer Relaxation des Fluktators beitragen. Eine rein longitudinale Kopplung an die Umgebungen ist deswegen für die Beschreibung der Relaxationseigenschaften des Fluktators ungeeignet.

Ein Maß für die Stärke dieser Übergänge stellt der entsprechende Parametrisierungswinkel θ_s (3.30) dar, wie folgende Rechnung am Beispiel eines Übergangs induziert durch die Ankopplung des Fluktators an die Umgebung zeigt:

$$\begin{aligned}
& |\langle s+ | \tau_z | s- \rangle|^2 \\
&= \left| \left(i \cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \langle s-1, \uparrow | + \sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \langle s, \downarrow | \right) \tau_z \left(i \sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right) | s-1, \uparrow \rangle + \cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right) | s, \downarrow \rangle \right) \right|^2 \\
&= 4 \sin^2\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_s}{2}\right). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Dieses Matrixelement hat sein Maximum genau bei $\theta_s = \frac{\pi}{2}$, also bei maximaler Hybridisierung der Zustände. Analoge Übergänge in den Eigenzuständen des Systemhamiltonians H_S erhalten wir auch im Falle des in den Eigenzuständen des n-Level-Qubits longitudinalen Operators $a^\dagger a$.

Abbildung 3.3 zeigt das Eigenenergiezustandsdiagramm für ein 3-Level-Qubit gekoppelt an einen Fluktuator; Beide mit einer rein longitudinalen Kopplung an die Umgebungen (3.39).

Wir erhalten hier, im Gegensatz zu einer rein transversalen Kopplung an die Umgebungen, Übergänge zwischen den Eigenzuständen $|2+\rangle$ und $|2-\rangle$, respektive $|1+\rangle$ und $|1-\rangle$. Solche Übergänge tragen jedoch nicht zu einer Abregung des Fluktators bei.

Schauen wir uns noch die Dephasierungsraten $T_{2;m'm}^{-1, long.}$ für die jeweiligen Nebendiagonalelemente $m'm$ mit $m' \neq m$ (2.33b) in Sekular Näherung an. So erkennen wir eine weitere Besonderheit im Falle von longitudinaler Kopplung an die Bäder, wir schließen eine mögliche "Liouvilleentartung" aus [38],

$$\begin{aligned}
T_{2;m'm}^{-1, long.} &= \text{Re}[\gamma_{m'm}] \tag{3.42} \\
&= \sum_{i=1,2} \left[\frac{1}{2} \left[\sum_{x \neq m'}^{hybrid} W_{i;m'x} + \sum_{x \neq m}^{hybrid} W_{i;mx} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\langle m' | s_i | m' \rangle - \langle m | s_i | m \rangle \right)^2 S_{X_{i,l} X_{i,l}}(\omega = 0)}_{\text{reine Dephasierung}} \right] \\
&= T_{2;mm'}^{-1, long.} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Der erste Term beinhaltet den Beitrag zur Dephasierung aufgrund der durch die Umgebung induzierten Übergänge zwischen den hybridisierten Zuständen. Der zweite Term, welchen man auch "reine Dephasierung" nennt, beschreibt hingegen Prozesse bei denen nur

3. Das Modell

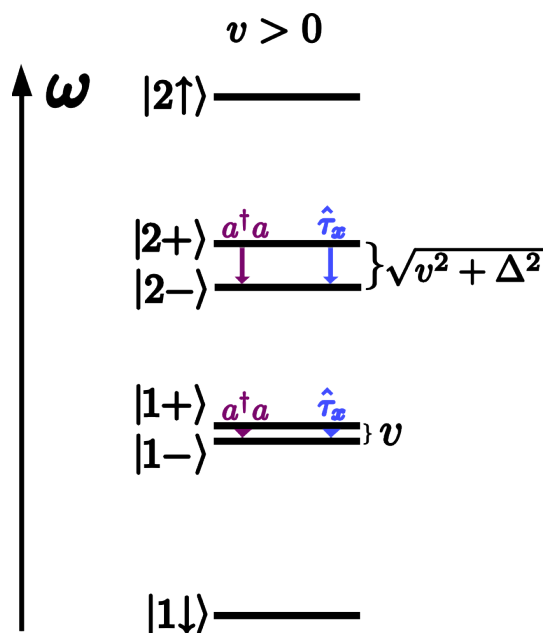


Abbildung 3.3.: Levelstruktur des gekoppelten Systems 3-Level-Qubit-Fluktuator für $\delta\omega = 0$ mit eingezeichneten Übergängen zwischen den hybridisierten Zuständen induziert durch die longitudinalen Ankopplungen an die Umgebungen bei $T = 0$. Lila Pfeile die Übergangsraten aufgrund der Ankopplung des 3-Level-Qubits an die Umgebung, respektive blaue Pfeile die Übergangsraten aufgrund der Ankopplung des Fluktuators an die Umgebung. Übergänge zwischen den Eigenzuständen bei $v = 0$, den Produktzuständen finden hier, im Gegensatz zu transversaler Kopplung nicht statt.

die Umgebung ihren Zustand wechselt. Da hier keine Energie zwischen dem System und der Umgebung ausgetauscht wird, ist hier die symmetrisierte Gleichgewichtskorrelationsfunktion für $\omega = 0$: $S_{X_{i,l}X_{i,l}}(\omega = 0)$ einzusetzen [38].

Weitere interessante Eigenschaften aufgrund longitudinaler Ankopplung an die Umgebungen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, beispielsweise eine Doppelpeak-Struktur in der Relaxationsrate des Fluktuators gekoppelt an ein Zwei-Niveau-System für den Resonanzfall $\delta\omega = 0$, sei der Leser auf Ref.: [33] verwiesen.

4. Methoden

Der erste Abschnitt dieses Kapitel beinhaltet Aussagen über die allgemeine Struktur der Lösung. Der folgende Abschnitt beinhaltet eine Diskussion über die Relaxation- T_1^{-1} und Dephasierungsrate T_2^{-1} allgemeiner Mehr-Niveau-Systeme, wie das hier behandelte n-Level-Qubit-Fluktuator System. Der Fokus liegt jedoch in der Angabe der Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$.

4.1. Lösungsstruktur der Bloch Redfield Gleichungen

Wie in Kapitel 2 erwähnt wurde, verwenden wir in dieser Arbeit grundsätzlich die beiden Näherungen: Bornsche Näherung und Markov Näherung. Dadurch haben wir ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten als Bewegungsgleichung für unsere reduzierte Dichtematrix $\rho(t)$ erhalten. Ihre Lösung können wir für den Fall, dass der Bloch Redfield Tensor diagonalähnlich ist leicht angeben.

Die dritte oft verwendete Näherung, die Sekulare Näherung, führt zu einer vollständigen Entkopplung der Diagonalelemente von allen Nichtdiagonalelementen der Dichtematrix des reduzierten Systems $\rho(t)$. Zudem zu einer vollständigen Entkopplung aller Nichtdiagonalelemente untereinander (Ausnahme: "Liouvilleentartung"). Wir erhalten dadurch Mastergleichungen für die Diagonalelemente, sowie einfach anzugebende Dephasierungsraten für die Nebendiagonalelemente.

Die Bloch Redfield Gleichungen seien hier nochmals zusammengefasst,

$$\rho(t)_{m'm} = \sum_{n',n} \rho(t)_{n'n} \mathcal{L}_{m'mn'n}^i \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{L}_{m'mn'n}^1 := -i\omega_{n'n} \delta_{m'm,n'n} + R_{m'mn'n}, \quad (4.1b)$$

$$\mathcal{L}_{m'mn'n}^2 := -i\omega_{n'n} \delta_{m'm,n'n} + R_{m'mn'n} \delta_{m'm,n'n}, \quad (4.1c)$$

mit den Einträgen des Bloch Redfield Tensors (2.25),

$$R_{m'mn'n} = A_{nmm'n'} + A_{n'm'mn}^* - \sum_k (A_{m'kkn'} \delta_{mn} + A_{mkkn}^* \delta_{m'n'}), \quad (4.2a)$$

$$A_{abcd} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle a | s_i | b \rangle \langle c | s_j | d \rangle \cdot C_{X_i X_j}(\omega = \omega_{cd}), \quad (4.2b)$$

und $\mathcal{L}_{m'mn'n}^1$ dem "Liouville Tensor" ohne Sekulare Näherung, bzw. $\mathcal{L}_{m'mn'n}^2$ dem "Liouville Tensor" in Sekularer Näherung. Diese setzen sich aus dem ungestörten Teil des Systemhamiltonians und dem dissipativen Anteil in Form des Redfield Tensors zusammen.

Da wir verschiedene und unabhängige Umgebungen verwenden, verschwinden alle Kreuzkorrelationen in (4.2b),

$$C_{X_1 X_2}(\omega) = C_{X_1 X_2}(\omega) = 0. \quad (4.3)$$

4. Methoden

Damit zerfällt der Redfield Tensor $R_{m'mn'n}$ in eine Summe aus dem Redfield Tensor $R_{Q;m'mn'n}$ aufgrund der Ankopplung des n-Level-Qubits an das Umgebung, sowie des Redfield Tensor $R_{F;m'mn'n}$ aufgrund der Ankopplung des Fluktuators an seine Umgebung,

$$R_{m'mn'n} = R_{Q;m'mn'n} + R_{F;m'mn'n}. \quad (4.4)$$

Im Folgenden erweist es sich als nützlich die Gleichungen (4.1a) als Matrixgleichungen darzustellen. Dazu ordnen wir die Elemente der reduzierten Dichtematrix $\rho_{m'm}(t)$ in einem Vektor $\vec{\rho}(t)$ an, und fassen den Liouville Tensor $\mathcal{L}_{m'mn'n}^{1,2}$ als Liouville Matrix $\mathcal{L}_{m'm,n'n}^{1,2}$ mit dem Zeilenindex $m'm$ sowie dem Spaltenindex $n'n$ auf.

Aufgrund der Zeitunabhängigkeit des Liouville Tensors, und damit auch der entsprechenden Liouville Matrix, erhalten wir in sekularer wie auch ohne sekulare Näherung ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir können diese durch Diagonalisierung der Liouville Matrix entkoppeln, sofern wir voraussetzen können, dass die Liouville Matrix diagonalähnlich ist, d.h. es existiert eine Matrix S mit $\text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_{(2n)^2}] = S^{-1} \mathcal{L}_{m'm,n'n}^{1,2} S$.

Die Lösung lässt sich dann wie folgt darstellen,

$$\vec{\rho}(t) = \sum_i c_i \vec{v}_i e^{\mu_i t}, \quad (4.5a)$$

$$\mathcal{L}_{m'm,n'n}^{1,2} \vec{v}_i = \mu_i \vec{v}_i, \quad (4.5b)$$

mit \vec{v}_i den Eigenvektoren und μ_i den Eigenwerten der Liouville Matrix $\mathcal{L}_{m'm,n'n}^{1,2}$.

Die Anfangsbedingung führt auf folgendes lineares inhomogenes Gleichungssystem,

$$\vec{\rho}(0) = \sum_i c_i \vec{v}_i. \quad (4.6)$$

für die Koeffizienten c_i . Da die Eigenvektoren \vec{v}_i nach Voraussetzung eine Basis bilden, ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Wir behandeln ein System aus einem n-Level-Qubit wechselwirkend mit einem Fluktuator. Dieses System besitzt die Dimension $2n$. Daraus folgt, dass die Liouville Matrix $\mathcal{L}_{m'm,n'n}^{1,2}$ eine $(2n)^2 \times (2n)^2$ große Matrix ist.

4.2. Berechnung der Relaxations- und Dephasierungsraten

Wir zeigen in diesem Abschnitt wie wir ausgehend von der Lösung (4.5a) Relaxations- und Dephasierungsraten allgemeiner Mehr-Niveau-Systeme angeben können. Der Fokus liegt dann aber in der Angabe der Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$.

4.2.1. Relaxationsrate T_1^{-1}

Für ein Mehr-Niveau-Systeme haben wir mehrere Möglichkeiten sinnvolle Relaxationsraten T_1^{-1} zu definieren, so z.B:

4.2. Berechnung der Relaxations- und Dephasierungsraten

- Die charakteristische Zerfallsrate des am langsamsten zerfallenden Diagonalelements der reduzierten Dichtematrix $\rho(t)_{mm}$.
- Die charakteristische Zerfallsrate mit der der Erwartungswert der Energie des Systems in den Gleichgewichtswert strebt.

Um die Relaxationsrate des Fluktuators gekoppelt an das n-Level-Qubit zu berechnen, transformieren wir (4.5a) zunächst in die Basis der ungekoppelten Zustände.

Anschließend Spuren wir die Freiheitsgrade des n-Level-Qubits aus und erhalten die Dichtematrix des Fluktuators $\rho_F(t)$ in der Eigenbasis des Fluktuators.

Die Dichtematrix des Fluktuators $\rho_F(t)$ beinhaltet alle Information über den Fluktuator. Insbesondere können wir Erwartungswerte von Observablen des Fluktuators berechnen. So unter anderem auch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P_{\uparrow}(t)$ den Fluktuator im angeregten Zustand $|\uparrow\rangle$ vorzufinden. Diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P_{\uparrow}(t)$ wird durch das entsprechende Diagonalelement der Dichtematrix des Fluktuators $\rho_{F,\uparrow,\uparrow}(t)$ repräsentiert. Formal können wir die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P_{\uparrow}(t)$ damit wie folgt berechnen,

$$P_{\uparrow}(t) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{F,\downarrow,\downarrow}(t) & \rho_{F,\downarrow,\uparrow}(t) \\ \rho_{F,\uparrow,\downarrow}(t) & \rho_{F,\uparrow,\uparrow}(t) \end{pmatrix} \right] = \rho_{F,\uparrow,\uparrow}(t). \quad (4.7)$$

Führen wir diese Schritte an (4.5a) durch, so erkennen wir, dass sich an der Struktur der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsfunktion $P_{\uparrow}(t)$ nichts geändert hat. Das heißt wir erhalten für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsfunktion $P_{\uparrow}(t)$ immer noch eine Summe aus abfallenden Exponentialfunktionen,

$$P_{\uparrow}(t) = \sum_{i=1}^{(2n)^2} d_i e^{\mu_i t}, \quad (4.8)$$

mit lediglich veränderten Koeffizienten d_i , im Gegensatz zu $c_i \vec{v}_i$, die sich aus den einzelnen Transformationen ergeben. Der Index i hat die Mächtigkeit der Dimension der Liouville Matrix $\mathcal{L}_{m'm,n'n}^{1,2}$.

Für alle Berechnungen nehmen wir im Folgenden einen Anfangszustand bei der der Fluktuator vollständig angeregt ist: $P_{\uparrow}(0) = 1$.

Der Gleichgewichtswert $P_{\uparrow}(\infty)$ ist für den Fall, dass wir Sekulare Näherung anwenden, gegeben durch den Koeffizienten d_1 dessen zugehöriger Eigenwert μ_1 in (4.8) gleich Null ist: $\mu_1 = 0$.

Wir zeigen im Anhang A.2.5, dass ein solcher Eigenwert $\mu_1 = 0$ aufgrund der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit immer existiert.

Wir erhalten damit aus (4.8),

$$P_{\uparrow}(t) = d_1 + \sum_{i=2}^{(2n)^2} d_i e^{\mu_i t}. \quad (4.9)$$

Wir bemerken ferner, dass alle $d_i(T)$ sowie alle Eigenwerte $\mu_i(T)$ eine Funktion der Temperatur sein werden; da bekanntermaßen die Einträge des Redfield Tensors über die Badkorrelationsfunktionen $C_{X_i X_i}(\omega)$ temperaturabhängig sind, (4.2b).

Der Gleichgewichtswert d_1 ist dabei durch seine thermische Besetzung gegeben,

$$d_1(T) = \frac{e^{-\frac{\omega_f}{T}}}{Z}, \quad Z = 1 + e^{-\frac{\omega_f}{T}}, \quad (4.10)$$

4. Methoden

mit Z der Zustandssumme.

Im weiteren Vorgehen beschränken wir uns auf die Anwendung der Sekularen Näherung, zudem soll eine mögliche "Liouvilleentartung" ausgeschlossen werden.

In Sekularer Näherung können wir (4.9) wie folgt schreiben,

$$P_{\uparrow}(t) = d_1 + \sum_{i=2}^{2n} d_i e^{\lambda_i t} + \sum_{\substack{m'/m \\ m' > m}} g_{m'/m} \cos(\text{Im}[\lambda_{m'/m}]t) e^{\text{Re}[\lambda_{m'/m}]t}. \quad (4.11)$$

Dabei haben wir die Entkopplung aller Diagonalelemente von allen Nebendiagonalelementen, sowie aller Nebendiagonalelemente untereinander benützt.

Die erste Summe in (4.11) läuft dabei über alle Eigenwerte λ_i der Mastergleichung. Diese Eigenwerte sind alle reell und kleiner Null: $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$, siehe Anhang A.2.5. Man bezeichnet sie auch als "Relaxationsraten".

Alle anderen Eigenwerte $\lambda_{m'/m}$ sind genau die Diagonalelemente der Liouville Matrix $\mathcal{L}_{m'/m, n'n}^2$ mit $m' = n'$, $m = n$ und $m' \neq m$, $n' \neq n$ (4.1c), siehe auch Abbildung 2.1, und damit gleich,

$$\lambda_{m'/m} := -\gamma_{m'/m} - i\omega_{m'/m}, \quad (4.12a)$$

$$\text{Re}[\lambda_{m'/m}] = -\text{Re}[\gamma_{m'/m}], \quad (4.12b)$$

$$\text{Im}[\lambda_{m'/m}] = -\text{Im}[\gamma_{m'/m}] - \omega_{m'/m}, \quad m' \neq m, \quad (4.12c)$$

mit $\text{Im}[\gamma_{m'/m}]$ dem "Lambshift", welcher um konsistent in Sekularer Näherung zu sein, klein sein sollte: $\text{Im}[\gamma_{m'/m}] \ll \omega_{m'/m}$ [38].

Wir sind an einer effektiven Relaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ des Fluktuators interessiert. Wir definieren allgemein für eine Funktion $f(t)$ welche von $f(t=0) = f_0$ nach $f(t \rightarrow \infty) = f_\infty$ zerfällt, die Zerfallsrate Γ wie folgt,

$$\Gamma := \frac{f_0 - f_\infty}{\int_0^\infty dt' [f(t') - f_\infty]}. \quad (4.13)$$

Diese Definition macht jedoch keinen Sinn für Funktionen mit oszillierenden Termen wie in (4.11). Vereinbaren wir jedoch $\text{Im}[\lambda_{m'/m}] = 0$ zu setzen, so erhalten wir die Einhüllende über die Oszillationen. Eine andere Möglichkeit wäre $\cos(\text{Im}[\lambda_{m'/m}]t) = 0$ zu setzen, damit erhalten wir eine Mittelung über die Oszillationen.

Wir erhalten somit aus (4.11),

$$P_{\uparrow,a}(t) := d_1 + \sum_{i=2}^{2n} d_i e^{\lambda_i t} + \sum_{\substack{m'/m \\ m' > m}} g_{m'/m} e^{\text{Re}[\lambda_{m'/m}]t}, \quad \text{Im}[\lambda_{m'/m}] = 0, \quad (4.14a)$$

$$P_{\uparrow,b}(t) := d_1 + \sum_{i=2}^{2n} d_i e^{\lambda_i t}, \quad \cos(\text{Im}[\lambda_{m'/m}]t) = 0, \quad (4.14b)$$

mit $P_{\uparrow,a}(t)$ der Einhüllenden, bzw. $P_{\uparrow,b}(t)$ der Mittelung über (4.11).

4.2. Berechnung der Relaxations- und Dephasierungsraten

Wir bemerken ferner, dass wir, aufgrund der vollständigen Entkopplung, jeden oszillierenden Term in (4.11) auf den entsprechenden Anfangszustand mit einer endlichen Besetzung des Nebendiagonalelements $\rho_{m'm}$ zurückführen können.

Wir können damit die Relaxationsrate des Fluktuators nach (4.13) berechnen und erhalten formal das Ergebnis,

$$T_{1,F,a}^{-1} = \frac{\sum_{i=2}^{2n} d_i + \sum_{m'm, m'>m} g_{m'm}}{\sum_{j=2}^{2n} \frac{d_j}{\lambda_j} + \sum_{m'm, m'>m} \frac{g_{m'm}}{\operatorname{Re}[\lambda_{m'm}]}} , \quad \operatorname{Im}[\lambda_{m'm}] = 0, \quad (4.15a)$$

$$T_{1,F,b}^{-1} = \frac{\sum_{i=2}^{2n} d_i}{\sum_{j=2}^{2n} \frac{d_j}{\lambda_j}} , \quad \cos(\operatorname{Im}[\lambda_{m'm}]t) = 0. \quad (4.15b)$$

Dabei haben wir benützt, dass $\operatorname{Re}[\lambda_i] \leq 0$, $\operatorname{Re}[\lambda_{m'm}] \leq 0$ für alle i gilt.

Betrachten wir im Folgenden noch die Eigenwerte λ_i der Mastergleichung (“Relaxationsraten“).

Wir unterscheiden hier zwei Fälle:

- $T = 0$:
Aufgrund fehlender Anregungen hat die zu den Mastergleichungen dazugehörige Koeffizientenmatrix Dreiecksgestalt (2.33). Für solche Matrizen kann man einfach zeigen, beispielsweise mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz, dass die Eigenwerte gleich den Einträgen der Hauptdiagonalen sind. Diese sind aber genau die negative Summe der Übergangsraten W_{mn} die aus dem Zustand n herausführen, wir erhalten damit,

$$\lambda_n = - \sum_m W_{mn}. \quad (4.16)$$

Die Eigenwerte der Mastergleichungen sind bei verschwindender Temperatur $T = 0$ also gleich der Summe der “Rausstreuraten” aus den jeweiligen Zuständen.

- $T \neq 0$:
Die Mastergleichungen besitzen nun keine Dreiecksform mehr. Die Eigenmoden findet man allgemein über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

4.2.2. Dephasierungsraten $T_{2;m'm}^{-1}$

Die Dephasierungsraten $T_{2;m'm}^{-1}$ sind für ein Mehr-Niveau-System allgemein definiert als die charakteristischen Zerfallsraten mit der die entsprechenden Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix $\rho(t)_{m'm}$ zerfallen.

Wir beschränken uns im Folgenden wieder auf die Anwendung der Sekularen Näherung, dies ermöglicht uns eine einfache Angabe der Dephasierungszeiten $T_{2;m'm}^{-1}$ aus (4.5a).

Wir erhalten für die Lösung der Nebendiagonalelemente $\rho(t)_{m'm}$ in Sekularer Näherung

4. Methoden

eine abfallende Exponentialfunktion mit der Zerfallsrate $T_{2;m'm}^{-1}$, welche gegeben ist durch den Realteil des entsprechenden Eintrages der Liouville Matrix $\mathcal{L}_{m'm,n'n}^2$ mit $m' = n'$, $m = n$ und $m' \neq m$, $n' \neq n$: $\text{Re}[\lambda_{m'm}]$,

$$\rho(t)_{m'm} \propto e^{-\text{Re}[\gamma_{m'm}]t}. \quad (4.17)$$

Siehe dazu auch Abbildung 2.1.

Wir erhalten also für die Dephasierungsrate $T_{2;m'm}^{-1}$,

$$\begin{aligned} T_{2;m'm}^{-1} &= \text{Re}[\gamma_{m'm}] \\ &= \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} \left[\sum_{x \neq m'} W_{i;m'x} + \sum_{x \neq m} W_{i;mx} \right] \\ &= T_{2;mm'}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dabei i indiziert die beiden ankoppelnden Umgebungen.

Wir bemerken dazu zwei Dinge:

1. Die Dephasierungsraten $T_{2;m'm}^{-1}$ sind bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$ gegeben durch die Summe der "Reinstreuratens" in die Zustände m' und m . Für die Relaxationsraten hatten wir für $T = 0$ die Summe über die jeweiligen "Rausstreuratens" erhalten.
2. Aus (4.4), folgt unmittelbar, dass die Dephasierungsrate $T_{2;m'm}^{-1}$ die Summe der Dephasierungsrate $T_{2;m'm;Q}^{-1}$ aufgrund der Ankopplung des n-Level-Qubits und der Dephasierungsrate $T_{2;m'm;F}^{-1}$ aufgrund der Ankopplung des Fluktuators an sein Bad ist,

$$T_{2;m'm}^{-1} = T_{2;m'm;Q}^{-1} + T_{2;m'm;F}^{-1}. \quad (4.19)$$

Punkt 2 ist im Allgemeinen nicht der Fall für die Relaxationsraten λ_i ,

$$\lambda_i \neq \lambda_{i,Q} + \lambda_{i,F}, \quad \text{i.A..} \quad (4.20)$$

Notwendig dafür ist, dass gemeinsame Eigenvektoren existieren,

$$(R_Q + R_F)\vec{v}_i^g = (\lambda_{Q,i} + \lambda_{F,i})\vec{v}_i^g. \quad (4.21)$$

Eine hinreichende Bedingung dafür wäre, falls beide Matrizen symmetrisch $R_Q = R_Q^T$, $R_F = R_F^T$ sind und miteinander vertauschen $[R_Q, R_F] = 0$ [41]. Die Struktur der Mastergleichungen (2.33) schließt jedoch für endliche Temperaturen schon die erste Voraussetzung aus.

Eine weitere hinreichende Bedingung ergibt sich falls die Koeffizientenmatrizen sich lediglich um einen konstanten Faktor α unterscheiden,

$$R_Q = \alpha R_F. \quad (4.22)$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Eigenvektoren/ Eigenräume identisch sind, die Eigenwerte unterscheiden sich jedoch um den Faktor α ,

$$R_F \vec{v}_i^g = \lambda_{F,i} \vec{v}_i^g, \quad (4.23a)$$

$$R_Q \vec{v}_i^g \stackrel{(4.22)}{=} \alpha \lambda_{F,i} \vec{v}_i^g. \quad (4.23b)$$

4.2. Berechnung der Relaxations- und Dephasierungsraten

Wir halten damit fest, dass die Relaxationsraten, im Gegensatz zu den Dephasierungsraten, im Allgemeinen keine Summe der Relaxationsraten aufgrund der Ankopplung des n -Level-Qubits und des Fluktuators an ihre jeweiligen Umgebungen sind.

5. Ergebnisse

Wir beginnen in diesem Kapitel mit einer Vorstellung der Experimente aus [32] über die Relaxations- und Dephasierungseigenschaften eines einzelnen hochfrequenten Fluktuators unter der Wechselwirkung des Phasenqubits.

Wir werden dann in den folgenden Abschnitten das allgemeine Relaxationszeitverhalten eines Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit studieren. Ausgehend von diesem System können wir dann auch Aussagen über das allgemeine System treffen. Wir beginnen dabei mit einer Diskussion der Relaxationsrate für $T = 0$, dabei werden wir insbesondere das Auftreten der Resonanzen in der Relaxationsratenkurve für $\delta\omega \leq 0$ erklären.

Der nachfolgende Abschnitt widmet sich dann dem Einfluss der Temperatur T auf das Relaxationsratenverhalten.

Das Kapitel schließt mit einem Vergleich der Theorie mit den Experimenten aus [32] ab. Wir werden zeigen, dass wir durch Einbeziehung höherer Energielevels des Phasenqubits die hier gemachten Beobachtungen qualitativ deuten können.

5.1. Vorstellung der Experimente und Motivation

In diesem Abschnitt stellen wir die Experimente über die Relaxations- und Dephasierungseigenschaften eines einzelnen hochfrequenten Fluktuators, der Gruppe Ustinov vor [32].

Die Fluktuator Relaxations- sowie Dephasierungsraten wurden dabei mittels der "Direct Coherent Control Methode" gewonnen. Dabei wird der Fluktuator, im Gegensatz zu früheren Methoden, indirekt über das Phasenqubit mit einer Mikrowelle mit einer Frequenz ω_μ gleich der Fluktuatorresonanzfrequenz ω_f und hoher Intensität angetrieben. Wie in [19] gezeigt wurde, existiert eine effektive, durch das Phasenqubit vermittelte, Wechselwirkung zwischen dem Fluktuator und dem elektromagnetischen Feld.

Die Auslese des Fluktuatorzustandes erfolgt mittels eines "iswap-Pulses". Hierbei wird das Phasenqubit in Resonanz mit dem Fluktuator gebracht. Anschließend wird die halbe Periodenlänge der gekoppelten Oszillationen zwischen Phasenqubit und Fluktuator abgewartet, dabei wird der Fluktuatorzustand bis auf einen Phasenfaktor auf das Phasenqubit übertragen. Der Zustand des Fluktuators ist dabei auf das Phasenqubit übertragen worden. Der Phasenqubitzustand wird anschließend mittels der herkömmlichen Methoden ausgelesen. Die Experimente zeigen die Antwortfunktionen eines Fluktuators zum einen als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ bei fester Temperatur T zum anderen als Funktion der Temperatur T aber bei fester Verstimmung $\delta\omega$.

5.1.1. Relaxations- und Dephasierungszeitkurven als Funktion der Verstimmung für feste Temperatur

In Abbildung 5.1 sehen wir die experimentell bestimmten Relaxations- T_1 , Dephasierungs- T_2 sowie Rabi-Oszillationszerfallszeiten T_{rabi} als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$, die mittels eines π -Puls- und Ramsey-Experiments gewonnen wurden.

Links in der Abbildung (a,b,c) sehen wir die Antworten des Zwei-Niveau-Systems bei fester Verstimmung $\delta\omega$:

5. Ergebnisse

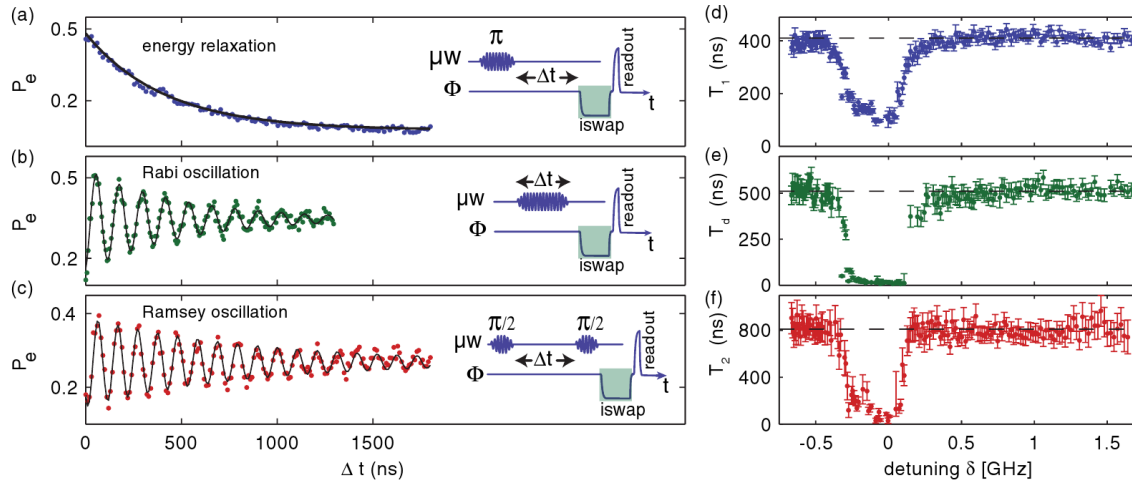


Abbildung 5.1.: Antwortfunktionen des Fluktuators auf Standardmikrowellensequenzen aus Ref.: [32] (a) Relaxation des Zwei-Niveau-Systems bei fester Verstimmung $\delta\omega := \omega_f - \omega_{01}$. (b) Rabi-Oszillationen für ein getriebenes Zwei-Niveau-System bei fester Verstimmung $\delta\omega$. (c) Ramsey-Oszillationen bei fester Verstimmung $\delta\omega$ (d,e,f) die extrahierten Relaxations-: T_1 , Rabi-Zerfalls-: T_{rabi} , und Dekohärenzzeit: T_2 als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$

- (a) Relaxationszeitverhalten des Fluktuators zur Bestimmung der Relaxationszeit T_1
- (b) Rabi-Oszillationen zwischen den Eigenzuständen durch resonantes Treiben mit einer Mikrowelle zur Bestimmung der Rabi-Zerfallszeit T_{rabi}
- (c) Ramsey-Oszillationen zur Bestimmung der Dekohärenzzeit T_2

Auf der rechten Seite (d,e,f) sehen wir die aus (a,b,c) extrahierten Zerfallszeiten als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ aufgetragen.

Wie in Erwartung für ein Zwei-Niveau-System (Fluktuator) wechselwirkend mit einem weiteren Zwei-Niveau-System (Qubit) erhalten wir in allen drei Experimenten eine Abnahme der Zerfallszeit für kleine Verstimmungen $|\delta\omega| \leq \perp$ [33]. Ungewöhnlich ist jedoch die relativ große Resonanzbreite σ in der Größenordnung von wenigen $v \sim 4 - 5$. Zudem ist Resonanz stark asymmetrisch zu negativen Verstimmungen hin verschoben.

Abbildung 5.1.1 zeigt eine Gegenüberstellung der Relaxationszeitkurve aus 5.1 (d) mit der erwarteten Relaxationszeitkurve für einen Fluktuator wechselwirkend mit einem Zwei-Niveau-System für einen Anfangszustand mit vollständiger Anregung des Fluktuators bei vollständiger Abregung des Zwei-Niveau-Systems, beide transversal an die Umgebungen gekoppelt.

Wir sehen die experimentell ermittelte Relaxationszeitkurve aus Abbildung 5.1 (d), blaue Kurve. Die Rote zeigt hingegen die theoretische Erwartung für die Relaxationszeitkurve des Fluktuators wechselwirkend mit einem Zwei-Niveau-System, mit der Relaxationszeit $T_{1,theo}$ [33],

$$T_{1,theo} = \frac{2[v^2 + \delta\omega^2][v^2(\Gamma_Q + \Gamma_F) + 4\Gamma_Q\delta\omega^2]}{[v^2 + \delta\omega^2][(\Gamma_Q + \Gamma_F)^2 v^2 + 4\delta\omega^2\Gamma_Q\Gamma_F]}, \quad (5.1)$$

mit,

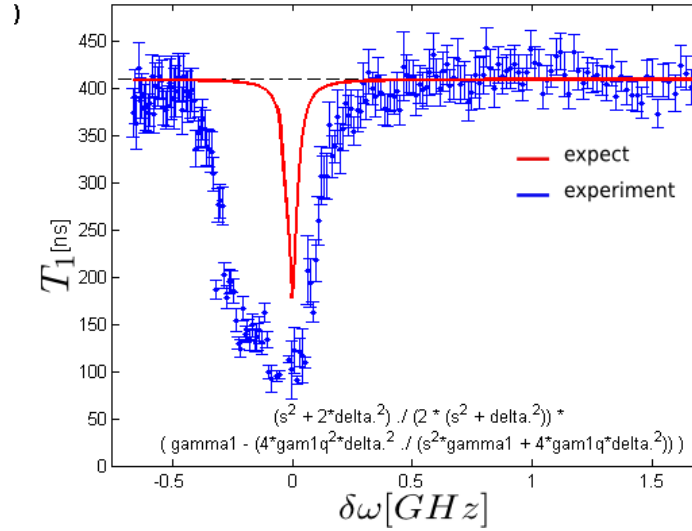


Abbildung 5.2.: Relaxationszeitkurven des Fluktuators als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$. Blau: Relaxationszeit des Fluktuators unter der Wechselwirkung eines Phasenqubits; Rot: Relaxationszeit des Fluktuators unter der Wechselwirkung eines Zwei-Niveau-Systems, aus Ref.: [33].

- v : 23MHz, der Kopplungskonstante,
- ω_f : 7.735GHz, der Eigenfrequenz des Fluktuators,
- Γ_Q : 110ns, der Relaxationsrate des ersten angeregten Zustandes des Phasenqubits in den Grundzustand,
- Γ_F : 410ns, der Relaxationsrate des Fluktuators ohne Wechselwirkung mit dem Phasenqubit,
- T : 35mK.

Die Abbildung 5.1.1 verdeutlicht die große Diskrepanz zwischen dem Experiment und der theoretischen Erwartung auf der Basis der Berechnungen für einen Fluktuator wechselwirkend mit einem Zwei-Niveau-System.

Wir werden beide Abweichungen,

1. Große Breite der Resonanz $\sigma > v$,
2. Asymmetrische Resonanz mit Gewicht zu negativen Verstimmungen,

durch Einbeziehung höherer Energielevels im Phasenqubitpotential 1.1 zumindest qualitativ erklären.

Wir führen die als eine Große erscheinende Resonanz auf eine Überlagerung mehrerer Resonanzen zwischen Fluktuator und Phasenqubit an den Resonanzstellen $\delta\omega_s$ zurück. Dabei erweist sich die starke Anharmonizität des Phasenqubitpotentials als wesentlich für das Auftreten mehrerer Resonanzen in der Relaxationszeitkurve bei negativen Verstimmungen $\delta\omega_s < 0$. Dies würde folglich auch das Gewicht zu negativen Verstimmungen erklären.

5. Ergebnisse

Die Voraussetzung für das Auftreten höherer Resonanzen $\delta\omega_s < 0$ ist zum einen die Existenz höherer Energielevels in dem Potential des Phasenqubits, zum anderen muss gewährleistet sein, dass höhere Energielevels anfänglich bevölkert sind. Der erste Punkt ist die Voraussetzung für resonante Wechselwirkung zwischen Fluktuator mit der Eigenfrequenz ω_f und den benachbarten Energiezuständen im Phasenqubit mit der Energieaufspaltung $\omega_s - \omega_{s-1} = \omega_f$. Der Zweite Punkt stellt sich als notwendig für tiefe Temperaturen, wie die im Experiment vorliegende von $T = 35\text{mK}$, heraus. Der Grund sind die vernachlässigbar kleinen Anregungsraten, welche zu einer Bevölkung höherer Levels führen könnten, und damit wiederum resonante Wechselwirkung ermöglichen würde. Wir erachten jedoch die für das Antreiben des Fluktuators notwendigen hohen Mikrowellenintensitäten als Mechanismus für die Anregung höherer Energielevels im Phasenqubit.

5.1.2. Relaxations- und Dephasierungszeitkurven als Funktion der Temperatur für feste Verstimmung

Abbildung 5.3 zeigt die Relaxationszeitkurven T_1 sowie die Dephasierungszeitkurven T_2 als Funktion der Temperatur bei der Verstimmung $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$.

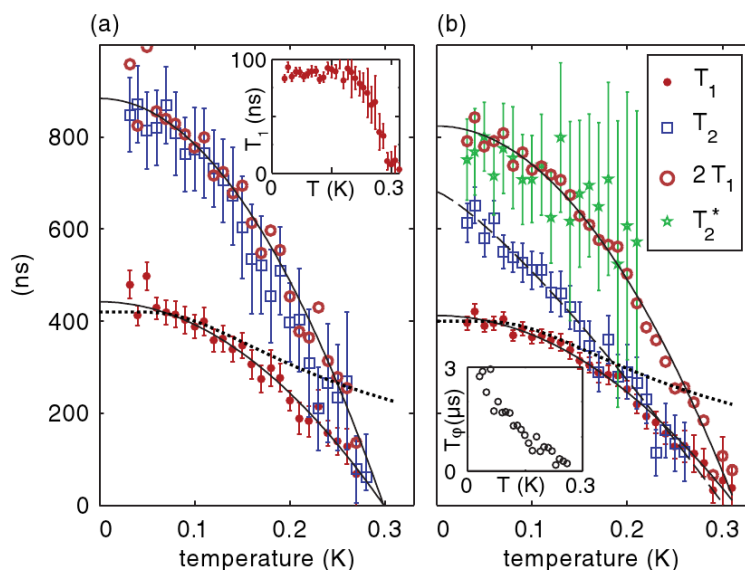


Abbildung 5.3.: Antwortfunktionen des Fluktuators als Funktion der Temperatur T bei fester Verstimmung: $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ aus Ref.: [32] (a) Fluktuator 1 aus Abb.: 5.1 mit Eigenfrequenz: $\omega_f: 7.735\text{GHz}$ (b) Fluktuator 2 mit Eigenfrequenz: $\omega_f: 7.947\text{GHz}$; durchgezogene Linien Fits an experimentelle Werte mit quadratischem Abfall; Strichlinie Fit an $T_2(T)$ kein quadratischer Abfall; gepunktete Linien Funktion $T_1(T) \propto \tanh(\frac{\omega_f}{2T})$; kleines Bild links zeigt die Relaxationszeitkurve des Qubits; kleines Bild rechts zeigt die extrahierte reine Dephasierung $T_2^* = \frac{1}{T_2^{-1} - \frac{1}{2}T_1^{-1}}$

Wir sehen in (a) die Antwortfunktionen des Fluktuators 1 (Fluktuator wie aus Abb.: 5.1) mit der Eigenfrequenz: $\omega_f: 7.735\text{GHz}$, in (b) die des Fluktuators 2 mit der Eigenfrequenz: $\omega_f: 7.947\text{GHz}$ (nicht zu sehen in Abb.: 5.1).

Die einzelnen Kurven sind dabei:

- rote Punkte: Relaxationszeitkurve $T_1(T)$,
- blaue Quadrate: Dephasierungszeitkurve $T_2(T)$,
- rote Kreise: $2 \cdot T_1(T)$,
- grüne Sterne: Reine Dephasierung $T_2^*(T)$ aus Hahn-Echo-Experiment

Durchgezogene Linien $f(T) = f(0) - aT^2$ und Strichlinie $g(T) = g(0) - bT^{1.24}$ sind Fits an die experimentellen Werte, gepunktete Linie ist die Funktion $T_1(T) \propto \tanh(\frac{\omega_f}{2T})$.

Wir machen folgende Feststellungen,

1. Für beide Fluktuatoren $1/2$ wird ein quadratischer Abfall der Relaxationszeitkurve $T_1(T)$ beobachtet: $T_1(T) = T_1(0) - aT^2$, ein Modell mit harmonischen Oszillatoren als Umgebung sagt hingegen einen Zerfall mit $T_1(T) \propto \tanh(\frac{\omega_f}{2T})$ für ein Zwei-Niveau-System voraus,
2. Fit an Dephasierungszeitkurve $T_2(T)$ an Fluktuator 2 ist abweichend von Fluktuator 1 nicht durch einen quadratischen Abfall gegeben, sondern näherungsweise durch: $T_2(T) = T_1(0) - bT^{1.24}$,
3. Fluktuator 1 zeigt keine reine Dephasierung $T_2^*(T)$ im Gegensatz zu Fluktuator 2. Nach (1.7) bedeutet dies, dass Fluktuator 1 gegenüber langsamen Rauschens immun zu sein scheint.

Nach Abbildung 5.1 (d), siehe auch Abbildung 5.1.1 ist keine Abnahme der Relaxationszeit bei dieser Verstimmung zu erkennen. Die Wechselwirkung zwischen dem Fluktuator ist vernachlässigbar klein. Die Relaxationszeit als Funktion der Temperatur zeigt dennoch kein Verhalten eines isolierten Zwei-Niveau-Systems in einer Umgebung von harmonischen Oszillatoren.

Dieses abweichende Verhalten könnte in einer anderen Umgebung zu suchen sein. Wir werden jedoch zeigen, dass wir auch hier qualitativ eine Erklärung für das abweichende Temperaturverhalten im Vergleich zu dem des echten Zwei-Niveau-Systems auf der Basis thermischer Anregung höherer Energielevels im Phasenqubit erhalten.

5.2. Parameter des Gesamtsystems

Wir wollen hier zunächst noch einmal die einzelnen Hamiltonians unseres Systems aus Kapitel 3 zusammenfassen. Um davon ausgehend die das System charakterisierenden Parameter anzugeben. In den nächsten Abschnitten diskutieren wir dann deren Einfluss auf das Relaxationszeitverhalten.

Das dissipative n-Level-Qubit-Fluktuator System wird beschrieben durch,

$$H = H_Q + H_F + H_{WW}^{QF} + H_{SR} + H_R, \quad (5.2)$$

5. Ergebnisse

mit den Systemhamiltonians,

$$H_Q = \sum_{s=0}^{n-1} s \left(\omega_{01} - \frac{s-1}{2} \Delta \right) |s\rangle \langle s| \quad (5.3a)$$

$$H_F = -\frac{1}{2} \omega_f \tau_z + \frac{1}{2} \omega_f \mathbf{1}, \quad (5.3b)$$

$$H_{WW}^{QF} = \frac{1}{2} v \cdot \hat{p} \cdot \tau_x, \quad (5.3c)$$

dem Wechselwirkungsterm zwischen System und Bädern,

$$H_{SR} = \frac{1}{2} \beta_{1,t} \hat{p} X_{1,t} + \frac{1}{2} \beta_{2,t} \tau_x X_{2,t}, \quad (5.4)$$

und den Korrelationsfunktionen der harmonischen Bäder

$$C_{X_{i,t} X_{i,t}}^{charm}(\omega) = \alpha_{X_{i,t}} \cdot \omega \left[1 + \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right], \quad \forall \omega. \quad (5.5)$$

Wir erhalten damit die folgenden sieben effektiven Parameter zur Charakterisierung unseres Systems:

Effektive Parameter

- n : Anzahl der Energielevels des n-Level-Qubits
- v : Kopplungskonstante
- Δ : Asymmetrieparameter
- $\delta\omega = \omega_f - \omega_{01}$: Verstimmung
- $\Gamma_Q = \frac{1}{2} \beta_{1,t}^2 \alpha_{X_{1,t}} \omega_{01}$: Qubit Relaxationsrate des ersten angeregten Zustandes in den Grundzustand bei $T = 0$ und ohne Wechselwirkung
- $\Gamma_F = \frac{1}{2} \beta_{2,t}^2 \alpha_{X_{2,t}} \omega_f$: Fluktuator Relaxationsrate ohne Wechselwirkung und bei $T = 0$
- T : Temperatur der Bäder

Die letzten Beiden ergeben sich da wir zwei verschiedene unabhängige Bäder annehmen (alle Kreuzkorrelationen verschwinden) und somit in allen Einträgen des Redfield Tensors nur Terme auftreten die proportional zu $\beta_{i,t}^2 \alpha_{X_{i,t}}$ sind (2.25).

5.3. Relaxationsratenverhalten bei $T=0$

Um die Relaxationsrate des Fluktutators $T_{1,F}^{-1}$ unter der Wechselwirkung eines n-Level-Qubits zu analysieren, studieren wir zunächst den Spezialfall $n = 3$. Dabei werden wir zunächst das Auftreten der Resonanzen in der Relaxationsrate bei den Verstimmungen $\delta\omega_1$ und $\delta\omega_2$ erklären.

5.3.1. Fluktuator unter der Wechselwirkung eines 3-Level-Qubits

Wir wählen für die folgende Diskussion den energetisch höchsten Zustand $|2, \uparrow\rangle$ als Anfangszustand. Für diesen Anfangszustand erhalten wir eine Zunahme der Relaxationsrate an beiden möglichen Resonanzstellen $\delta\omega_1$ und $\delta\omega_2$.

Wir werden in Unterabschnitt 5.3.3 den Einfluss des Anfangszustandes ausführlich diskutieren.

Wir wollen das Relaxationsratenverhalten anhand von drei Grenzfällen von Verstimmungen $\delta\omega$ studieren.

Die betrachteten Fälle seien:

- (a) starke Verstimmung: $|\delta\omega| \gg v, \Delta$
- (b) Resonanzfall: $\delta\omega_1 = 0$
- (c) Resonanzfall: $\delta\omega_2 = -\Delta$

Es erweist sich im Folgenden als nützlich die Diskussion in der Eigenbasis von H_S zu führen.

Die Energiezustandsdiagramme für die drei Grenzfälle, mit Berücksichtigung der Stärken der Übergangsraten, sehen wir in Abbildung 5.4.

Mit:

links: Fall a die Energieeigenzustände von H_S mit eingezeichneten Übergangsraten bei $|\delta\omega| \gg v, \Delta$,

mitte: Fall b die Energieeigenzustände von H_S mit eingezeichneten Übergangsraten bei $\delta\omega_1 = 0$,

rechts: Fall c die Energieeigenzustände von H_S mit eingezeichneten Übergangsraten bei $\delta\omega_2 = -\Delta$.

Der orangefarbene Punkt verdeutlicht dabei den Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$.

Die Eigenzustände seien hier noch einmal aufgelistet:

$$|1+\rangle = -i \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0, \uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1, \downarrow\rangle, \quad (5.6a)$$

$$|1-\rangle = i \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0, \uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1, \downarrow\rangle, \quad (5.6b)$$

$$|2+\rangle = -i \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |1, \uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |2, \downarrow\rangle, \quad (5.6c)$$

$$|2-\rangle = i \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |1, \uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |2, \downarrow\rangle, \quad (5.6d)$$

mit den Hybridisierungswinkeln,

$$\tan(\theta_1) = \frac{v}{\delta\omega}, \quad 0 \leq \theta_1 < \pi, \quad (5.7a)$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}v}{\delta\omega + \Delta}, \quad 0 \leq \theta_2 < \pi. \quad (5.7b)$$

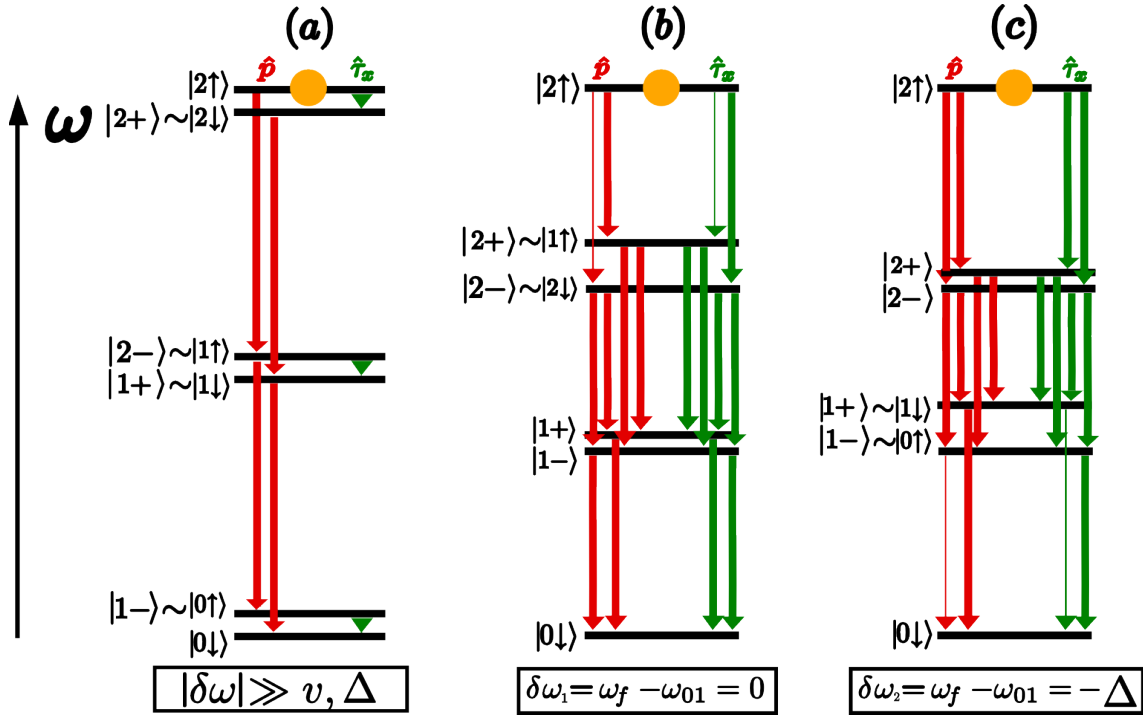


Abbildung 5.4.: Eigenzustände des 3-Level-Qubit-Fluktuator Systems mit eingezeichneten Übergängen für $T = 0$, Strichstärke der Pfeile stellt ein grobes Maß für die Stärke der Übergangsraten dar. (a) für eine große Verstimmung: $|\delta\omega| \gg v, \Delta$; (b) an der Resonanzstelle: $\delta\omega_1 = 0$; (c) an der Resonanzstelle: $\delta\omega_2 = -\Delta$. Orangefarbener Punkt verdeutlicht den Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$.

Diese stellen ein Maß für die Wechselwirkung zwischen Fluktuator und 3-Level-Qubit dar. Der Grund- und energetisch höchsten Zustand, blieb in “RWA” durch die Kopplung (5.3c) unbeeinflusst,

$$H_S |0, \downarrow\rangle = 0 |0, \downarrow\rangle, \quad (5.8a)$$

$$H_S |2, \uparrow\rangle = (\omega_{01} + \omega_f - \Delta) |2, \uparrow\rangle. \quad (5.8b)$$

Wir wollen nun die drei Grenzfälle analysieren.

Fall a: $|\delta\omega| \gg v, \Delta$

In diesem Fall ist die Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,a,F}^{-1}$ gegeben durch seine Relaxationsrate an sein eigenes Bad Γ_F . Für $|\delta\omega| \gg v, \Delta$ erhalten wir nämlich, dass beiden Hybridisierungswinkel (5.7a) und (5.7b) annähernd verschwinden, also alle Zustände entkoppelt sind. Die Eigenzustände sind somit in guter Näherung gleich den entsprechenden Eigenzustände des entkoppelten Systems ($v = 0$). Wählen wir also einen Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$ so zählt allein die Relaxationsrate von den angeregten Zuständen des Fluktuators zu denen in denen er abgeregt ist und da diese unabhängig von dem Zustand des Qubits ist erhalten wir als Relaxationsrate des Fluktuators:

$$T_{1,F,a}^{-1} = \Gamma_F. \quad (5.9)$$

Fall b: $\delta\omega_1 = 0$

In diesem Fall erreichen wir eine vollständige Hybridisierung der Zustände (5.6a) und (5.6b) hingegen aber nur eine leichte Hybridisierung der Zustände (5.6c) und (5.6d), dies hat zur Folge, dass im Vergleich zu Fall a zusätzliche Übergangsraten zu unserem System hinzukommen. Qualitativ bedeutet dies, dass wir einen weiteren Kanal der Relaxation geöffnet haben, der zusätzlich zur Relaxation des Fluktuators beiträgt [33]. Dieser zusätzliche Kanal trägt umso mehr zur Relaxation des Fluktuators bei umso größer Γ_Q ist. Die Relaxationsrate des Fluktuators ist insgesamt im Vergleich zu der in Fall a erhöht:

$$T_{1,F,b}^{-1} > T_{1,F,a}^{-1}. \quad (5.10)$$

Fall c: $\delta\omega_2 = -\Delta$

Dieser Fall gleicht dem Fall b wobei hier die Rollen der hybridisierten Unterräume vertauscht sind. Wir erwarten also auch für diesen Fall eine Zunahme der Relaxationsrate im Vergleich zu Fall a, im Vergleich zu Fall b aber eine etwas schwächere Relaxationsrate. Dies kann man sich anhand der Hybridisierungswinkel zusammengefasst in nachfolgender Tabelle klar machen:

	Fall b: $\delta\omega_1 = 0$	Fall c: $\delta\omega_2 = -\Delta$
θ_1	$\frac{\pi}{2}$	$\arctan\left(\frac{v}{\Delta}\right)$
θ_2	$\arctan\left(\frac{\sqrt{2}v}{\Delta}\right)$	$\frac{\pi}{2}$

Wir wir der Tabelle entnehmen, haben wir im Fall c eine etwas schwächere Hybridisierung der ohnehin schon fast entkoppelten Zustände als in Fall b und damit auch eine etwas schwächere Relaxationsrate als in Fall b. Wir halten damit fest:

$$T_{1,F,b}^{-1} > T_{1,F,c}^{-1} > T_{1,F,a}^{-1}. \quad (5.11)$$

Abschließend möchten wir noch kurz die Annahme $\Gamma_Q \gtrsim \Gamma_F$ diskutieren. Diese Annahme ist essentiell um eine Zunahme der Relaxation des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ im Vergleich zur Fluktuatorrelaxationsrate Γ_F in den Resonanzfällen b und c zu bekommen. Hätten wir den umgekehrten Fall $\Gamma_Q \lesssim \Gamma_F$ angenommen, müssten wir mit einer Abnahme der normierten Relaxationsrate rechnen. Dies können wir uns am einfachsten dadurch klar machen indem wir den Extremfall $\Gamma_Q = 0$ betrachten. Die Kopplungen zwischen Fluktuator und Qubit sind bekanntlich am effektivsten falls die Verstimmungen $\delta\omega$ an den Resonanzstellen $\delta\omega_1 = 0$ bzw. $\delta\omega_2 = -\Delta$ liegen, und damit der Energieübertrag des Fluktuators an das Qubit am größten ist. Ist nun aber das Qubit nahezu abgeschirmt von der Umwelt, so leiden diese Zustände nicht an Relaxation und somit ist mit einer Verkleinerung der Relaxationsrate des Fluktuators unter Wechselwirkung mit dem Qubit im Vergleich ohne Wechselwirkung zu rechnen:

$$T_{1,F,b}^{-1} \Big|_{\Gamma_Q \lesssim \Gamma_F}, T_{1,F,c}^{-1} \Big|_{\Gamma_Q \lesssim \Gamma_F} < T_{1,F,b}^{-1} \Big|_{\Gamma_Q \gtrsim \Gamma_F}, T_{1,F,c}^{-1} \Big|_{\Gamma_Q \gtrsim \Gamma_F}. \quad (5.12)$$

Abbildung 5.5 zeigt die numerisch berechneten Relaxationsraten des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ für die Verhältnisse: $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10, 1, 0.1$ in Sekularer Näherung.

Wir sehen:

5. Ergebnisse

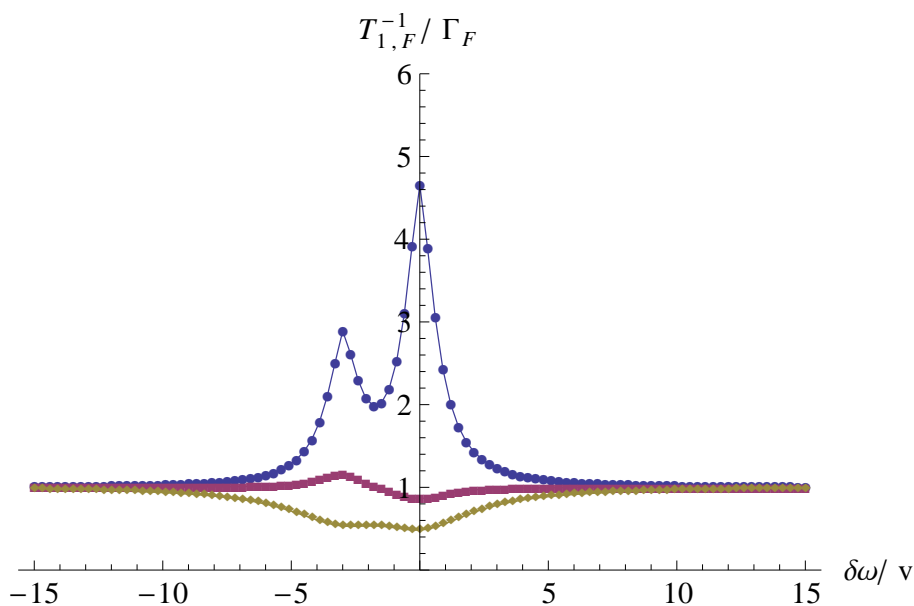


Abbildung 5.5.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung. blau: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$; rot: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 1$; gelb: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 0.1$. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{\nu}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $T = 0$.

- blau: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$
- rot: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 1$
- gelb: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 0.1$

Wir erkennen eine Zunahme der Relaxationsrate an den Resonanzstellen $\delta\omega_1$ und $\delta\omega_2$ für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$ gegenüber der Fluktuatorrelaxationsrate ohne Wechselwirkung Γ_F . Für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 0.1$ erhalten wir das entgegengesetzte Verhalten, also eine Abnahme der Relaxationsrate an den Resonanzstellen. Auch das asymptotische Verhalten der Relaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ hin zu Γ_F zeigt die Numerik.

Offensichtlich deutet sich ein "Durchgang", bei der die effektive Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ sich Γ_F annähert, bei etwa $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} \cong 1$ an. Der genaue Wert für das Verhältnis von Γ_Q zu Γ_F unterscheidet sich je nach Resonanzstelle, liegt jedoch in der Größenordnung von $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} \cong 1$.

5.3.2. Fluktuator unter der Wechselwirkung eines n-Level-Qubits

Haben wir das obige Verhalten des Fluktuators unter dem Einfluss eines 3-Level-Qubits verstanden so ist die Verallgemeinerung auf ein n-Level-Qubit nicht mehr schwer.

Das n-Level-Qubit-Fluktuator System beinhaltet $n - 1$ kohärent miteinander wechselwirkenden Unterlevelsysteme (3.17a),

$$|s - 1, \uparrow\rangle \circlearrowleft |s, \downarrow\rangle, \quad s \in \{1, \dots, n - 1\}. \quad (5.13)$$

Ihr Hybridisierungsgrad ist durch den jeweiligen Hybridisierungswinkel θ_s gesteuert, welcher nach (3.30) gegeben ist durch,

$$\tan(\theta_s) = \frac{\sqrt{sv}}{\delta\omega + (s-1)\Delta}, \quad 0 \leq \theta_s < \pi, s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.14)$$

Die größte Hybridisierung, und damit eine Maximierung der Relaxationskanäle, erhalten wir für,

$$\tan(\theta_s)_{max} \Leftrightarrow \delta\omega + (s-1)\Delta = 0, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (5.15)$$

Wir erwarten deshalb für den Anfangszustand $|n-1, \uparrow\rangle$ das Auftreten von weiterer Resonanzen in der Relaxationzeitkurve bei den folgenden Verstimmungen,

$$\delta\omega_s = -(s-1)\Delta, \quad (5.16a)$$

$$\delta\omega_s \leq 0, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.16b)$$

Dies ist gleichbedeutend, dass die Eigenfrequenz des Fluktuators ω_f resonant mit benachbarten Energieübergängen des n -Level-Qubits ist, siehe Gl.: (3.5).

Aus (5.16) erhalten wir nämlich,

$$\delta\omega_s \Leftrightarrow \omega_f = \omega_{01} - (s-1)\Delta, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.17)$$

In Abbildung 5.6 sehen wir, die in Sekularer Näherung berechneten Relaxationsraten des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ unter der Wechselwirkung eines $n = 2, 3, 4, 5$ -Level-Qubits. Wir wählen als Anfangszustand jeweils den energetisch höchsten Zustand $|n-1, \uparrow\rangle$.

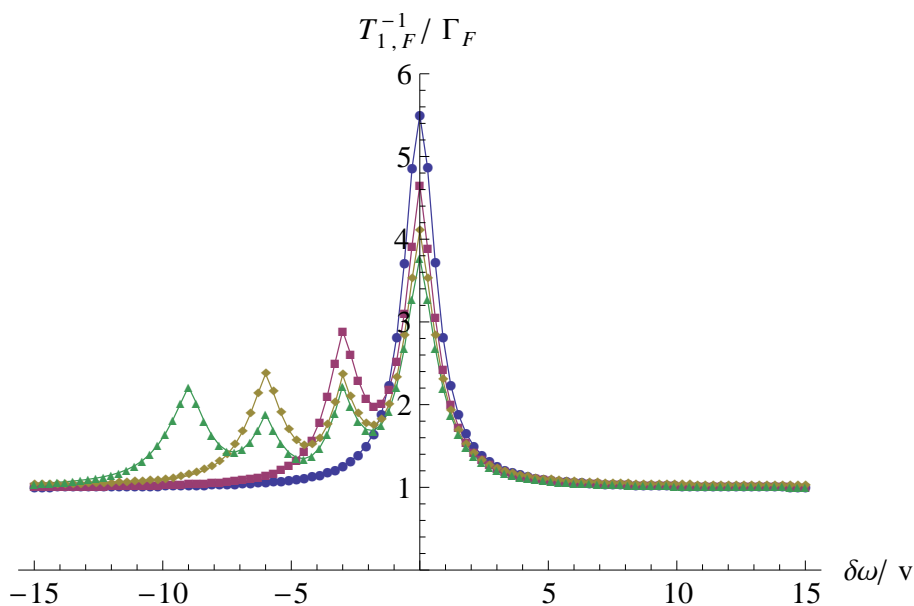


Abbildung 5.6.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem n -Level-Qubit als Funktion der Verstimmung. blau: $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 2$; rot: $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 3$; gelb: $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 4$; grün: $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 5$. Gemeinsame Parameter: $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{\nu}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$, $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$ und $T = 0$.

Wir sehen:

- blau: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 2$
- rot: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 3$
- gelb: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 4$
- grün: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $n = 5$

Die Berechnungen zeigen sehr deutlich das sukzessive Hinzutreten weiterer Resonanzen an den durch 5.16 vorhergesagten Stellen mit steigender Levelzahl n .

5.3.3. Zusammenfassung/ Einfluss der Parameter und des Anfangszustandes auf die Struktur der Relaxationsratenkurve

Wir wollen in diesem Unterabschnitt abschließend die Rolle der Parameter aus 5.2, sowie des Anfangszustandes auf die allgemeine Struktur der Relaxationsratenkurve diskutieren. Wir fassen dabei die Erkenntnisse aus vorangegangenen Abschnitten zusammen.

Einfluss von n und des Anfangszustandes

Die Anzahl der Qubitlevels n gibt die Anzahl der möglichen Resonanzen wieder, nach (5.13) erhalten wir $n - 1$ mögliche Resonanzen.

Das Auftreten der einzelnen Resonanzen hängt jedoch, für verschwindende Temperaturen $T = 0$, wesentlich vom Anfangszustand ab.

Nur Anfangszustände welche energetisch gleich oder überhalb der, welche nach (5.13) eine kohärente Wechselwirkung zeigen, führen zu einer Zunahme der Relaxationsrate bei der

entsprechenden Verstimmung $\delta\omega_s$ (5.16) in der Relaxationsratenkurve.

Eine Demonstration des Einflusses des Anfangszustandes für das Auftreten zeigt die Abbildung 5.7. Wir berechnen hier die Relaxationsrate des Fluktuators unter der Wechselwirkung eines 4-Level-Qubits für die Anfangszustände $|0, \uparrow\rangle, |1, \uparrow\rangle, |2, \uparrow\rangle$ und $|3, \uparrow\rangle$ in Sekularer Näherung.

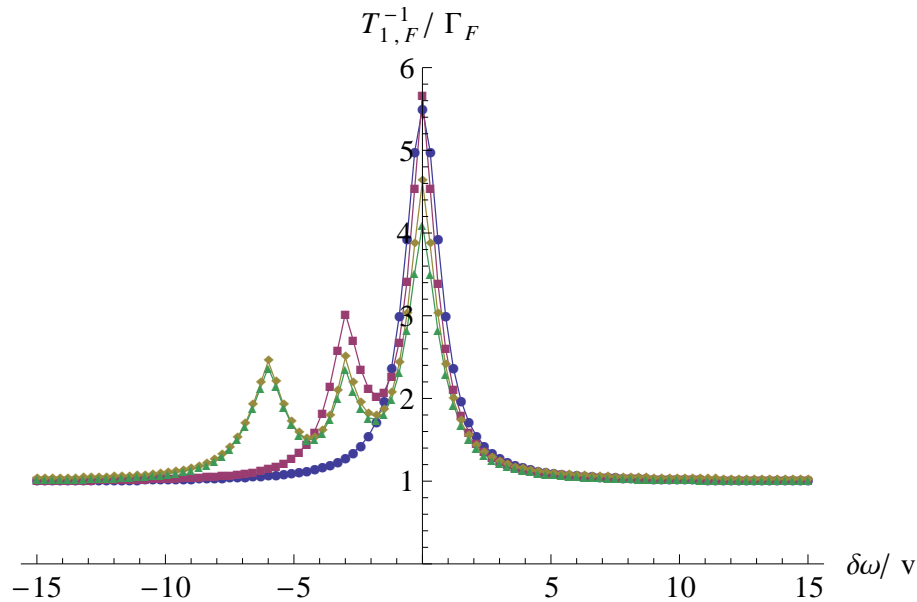


Abbildung 5.7.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 4-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung für verschiedene Anfangszustände. blau: $T_{1,F}^{-1}$ für Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$; rot: $T_{1,F}^{-1}$ für Anfangszustand $|1, \uparrow\rangle$; gelb: $T_{1,F}^{-1}$ für Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$; grün: $T_{1,F}^{-1}$ für Anfangszustand $|3, \uparrow\rangle$. Gemeinsame Parameter: $n = 4$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$, $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$ und $T = 0$.

Die Farben bedeuten dabei:

- blau: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für den Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$
- rot: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für den Anfangszustand $|1, \uparrow\rangle$
- gelb: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für den Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$
- grün: Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für den Anfangszustand $|3, \uparrow\rangle$

Wir sehen, dass mit zunehmender Anregung des 4-Level-Qubits die Resonanzen an den durch (5.16) gegebenen Stellen hinzutreten.

Ferner erhalten wir für die Anfangszustände $|3, \uparrow\rangle$ und $|2, \uparrow\rangle$ ähnliche Relaxationsratenkurven. Der Grund liegt in der in ‘‘Rotating Wave Approximation‘‘ vernachlässigten Kopplung des energetisch höchsten Zustandes $|3, \uparrow\rangle$ mit dem Zustand $|2, \downarrow\rangle$, siehe Kapitel 3.1.2.

Einfluss von v

5. Ergebnisse

Die Kopplungskonstante v steuert über die Hybridisierungswinkel,

$$\tan(\theta_s) = \frac{\sqrt{s}v}{\delta\omega + (s-1)\Delta}, \quad 0 \leq \theta_s < \pi, s \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (5.18)$$

die Stärke der Hybridisierungen der Zustände aus (5.13).

Eine zunehmende Hybridisierung erhöht dabei die Relaxationskanäle. Für $\Gamma_Q \gtrsim \Gamma_F$ erhalten deswegen eine Zunahme der Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ im Vergleich zu Γ_F .

Wir bemerken weiter, dass nach (5.18) diese Wechselwirkung sensitiv auf die Position der Verstimmung $\delta\omega$ ist. Somit stellt v ein Maß für die Breite σ der Resonanzen dar. Diese erhielten wir nach (5.18) an den Stellen (5.16).

Die Kopplungsstärke v hat aber auch einen Einfluss auf das Verhältnis der Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ zu Γ_F , wie die folgenden Berechnungen zeigen.

Wir sehen in Abbildung 5.8 die Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für drei verschiedene Kopplungsstärken $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{4}{6}10^4, \frac{2}{6}10^4, \frac{1}{6}10^4$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

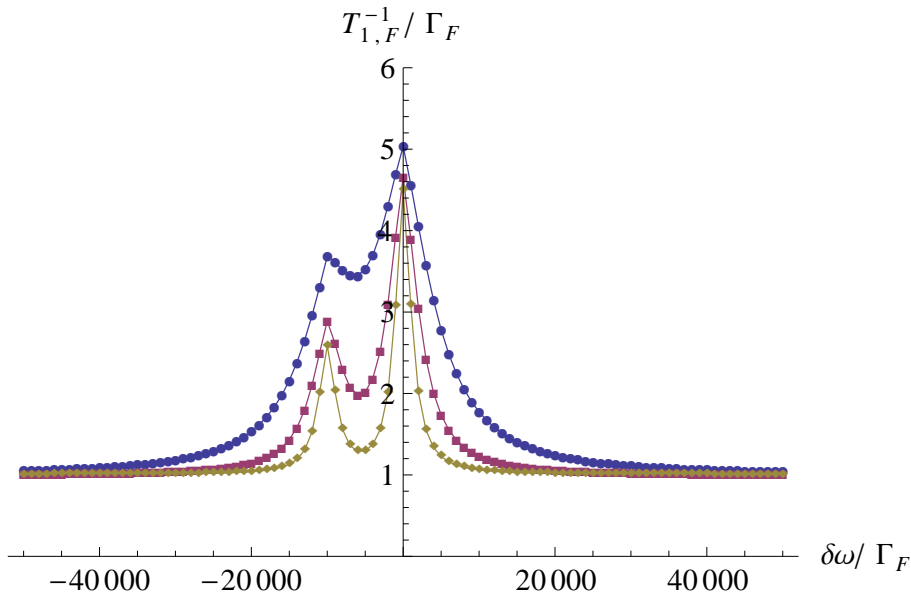


Abbildung 5.8.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung. blau: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{4}{6}10^4$; rot: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{2}{6}10^4$; gelb: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{6}10^4$. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$, $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$ und $T = 0$.

Die Farben gehören dabei zu:

- blaue Kurve: $T_{1,F}^{-1}$ für das Verhältnis $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{4}{6}10^4$
- rote Kurve: $T_{1,F}^{-1}$ für das Verhältnis $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{2}{6}10^4$
- gelbe Kurve: $T_{1,F}^{-1}$ für das Verhältnis $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{6}10^4$

Die Berechnungen zeigen sehr deutlich eine Zunahme der Resonanzbreite mit wachsender Kopplungsstärke v , des Weiteren aber auch eine Zunahme der Relaxationsrate für wachsendes v . Der Gegenläufige Effekt, also die Abnahme der Relaxationsrate mit wachsendem

v erhalten wir für $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} \lesssim 1$, siehe Abbildung 5.9.

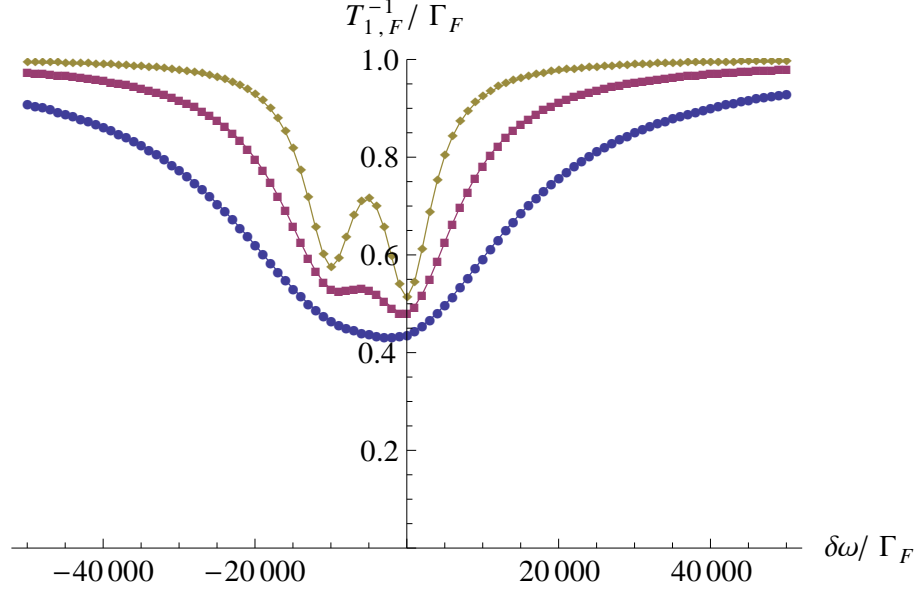


Abbildung 5.9.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung. blau: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{4}{6}10^4$; rot: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{2}{6}10^4$; gelb: $T_{1,F}^{-1}$ für $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{6}10^4$. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$, $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 0.1$ und $T = 0$.

Dies lässt sich damit erklären, dass bei stärkerer Relaxationsrate des Qubits im Vergleich zum Fluktuator $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} \gtrsim 1$, die Wechselwirkung $\propto v$ sich günstig für die Relaxation des Fluktuators auswirkt. Im umgekehrten Fall $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} \lesssim 1$ die Wechselwirkung die Relaxationsrate hingegen erniedrigen lässt.

Einfluss von Δ

Δ der Asymmetrieparameter regelt über die Hybridisierungswinkel θ_s die Positionen in der Verstimmung bei denen es zu Resonanz kommt. Diese lesen wir aus (5.18) zu,

$$\delta\omega_s = -(s-1)\Delta, \quad (5.19a)$$

$$\delta\omega_s \leq 0, \quad s \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (5.19b)$$

ab.

Einfluss von Γ_Q und Γ_F

Nach (4.4) zerfällt der Redfield Tensor für unabhängige und verschiedene Bäder in die Summe der Redfield Tensoren bezüglich des Fluktuators, respektive des n-Level-Qubits. Damit lassen sich alle Übergangsraten W_{mn} wie folgt darstellen (2.33a),

$$W_{mn} = W_{Q,mn} + W_{F,mn}, \quad (5.20a)$$

$$W_{mn} = a_{mn} \cdot \beta_{1,t}^2 \alpha_{X_{1,t}} + b_{mn} \cdot \beta_{2,t}^2 \alpha_{X_{2,t}}, \quad (5.20b)$$

mit $W_{Q,mn}$ den Übergangsraten aufgrund der Ankopplung des n-Level-Qubits an das Bad,

5. Ergebnisse

respektive $W_{F,mn}$ aufgrund der Ankopplung des Fluktuators an sein Bad. a_{mn}, b_{mn} hängen vom Energieunterschied über die Gleichgewichtskorrelationsfunktionen und den Übergangsmatrixelementen, insbesondere also von der Hybridisierung der Zustände, ab.

Mit,

$$\Gamma_Q = \frac{1}{2}\beta_{1,t}^2 \alpha_{X_{1,t}} \omega_{01} \quad (5.21a)$$

$$\Gamma_F = \frac{1}{2}\beta_{2,t}^2 \alpha_{X_{2,t}} \omega_f \quad (5.21b)$$

folgt daraus unmittelbar, dass die absolute Relaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ (ohne Normierung auf Γ_F) eines Nichtgleichgewichtszustandes in den Grundzustand im Allgemeinen mit zunehmendem Γ_Q , sowie Γ_F ansteigt.

Der gegensätzliche Effekt also die Abnahme der Relaxationsrate mit zunehmendem Γ_Q bzw. Γ_F ist unter dem Begriff Quanten-Zeno-Effekt bekannt. Wir werden diesen Effekt in Kapitel 6 ausführlich behandeln. Es sei nur soviel angemerkt das dieser Effekt in Sekularer Näherung und ohne Liouvilleentartung grundsätzlich nicht zu sehen ist.

5.4. Relaxationsratenverhalten bei endlichen Temperaturen

Wir wollen das Temperaturverhalten der Relaxationsrate des Fluktuators wieder für den Fall $n = 3$ studieren.

Das Studium in diesem Abschnitt soll das allgemeine Relaxationsratenverhalten bei endlichen Temperaturen untersuchen. Ein Vergleich der numerisch berechneten Relaxationsraten, unter Verwendung der experimentell bestimmter Parameter, mit den Experimenten aus Ref.: 5.1 erfolgt dann im nächsten Abschnitt 5.5.

Der Einfluss der Temperatur T fließt in Bloch Redfield Näherung über die Gleichgewichtskorrelationen der Bäder ein,

$$C_{X_{i,t}X_{i,t}}^{harm}(\omega) = \alpha_{X_{i,t}} \cdot \omega \left[1 + \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right], \quad \forall \omega. \quad (5.22)$$

Dabei sind die Anregungsraten W_{kl} gegenüber entsprechenden Abregungsraten W_{lk} exponentiell mit dem Boltzmannfaktor $e^{-\frac{\omega_{kl}}{T}}$ unterdrückt, siehe Anhang A.2.2,

$$W_{kl} \propto C(\omega_{lk}), \quad (5.23a)$$

$$C(-\omega_{lk}) = C(\omega_{lk})e^{-\frac{\omega_{lk}}{T}}. \quad (5.23b)$$

Diese Aussage gilt immer im Gleichgewicht und ist unabhängig von der speziellen Wahl der Bäder, wie hier der harmonischen Bäder.

Wir bemerken ferner, dass die Dichtematrix des ‘‘Endzustandes’’,

$$\rho(t)_{\text{end}} := \rho(t \rightarrow \infty), \quad (5.24)$$

durch das statistische Gemisch über die Eigenzustände von H_S gegeben ist,

$$\rho(t)_{\text{end}} = \sum_{i=1}^6 |i\rangle \langle i| \frac{e^{-\frac{\omega_i}{T}}}{Z}, \quad Z = \sum_{i=1}^6 e^{-\frac{\omega_i}{T}}, \quad (5.25a)$$

5.4. Relaxationsratenverhalten bei endlichen Temperaturen

mit,

$$H_S |i\rangle = \omega_i |i\rangle, \quad (5.26)$$

und Z der Zustandsumme.

Den Experimenten angelehnt diskutieren wir das Relaxationszeitverhalten des Fluktuators zum einen für feste Temperatur T als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$, sowie als Funktion der Temperatur T jedoch fester Verstimmung $\delta\omega$.

Ferner verwenden wir die folgenden Anfangszustände:

- Thermischer Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators:

$$\rho(t=0) = \sum_{s=0}^2 |s\rangle \langle s| \frac{e^{-\frac{\omega_s}{T}}}{Z} \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \quad Z = \sum_{s=0}^2 e^{-\frac{\omega_s}{T}} \quad (5.27)$$

- Energetisch höchster Zustand $|2, \uparrow\rangle$, mit:

$$\rho(t=0) = |2, \uparrow\rangle \langle 2, \uparrow| \quad (5.28)$$

- Zur Demonstration der thermischen Aktivierung der Resonanz $\delta\omega_2 = -\Delta$, den Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$, mit:

$$\rho(t=0) = |0, \uparrow\rangle \langle 0, \uparrow| \quad (5.29)$$

Als Ausgangspunkt der Diskussion über das Relaxationsratenverhalten des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit fassen wir kurz das Temperaturverhalten der Relaxationsrate $T_{1,2NS}^{-1}$ eines allgemeinen dissipativen Zwei-Niveau-Systems zusammen.

Nach (1.6a) erhalten wir dessen Relaxationsrate $T_{1,2NS}^{-1}$ zu,

$$T_{1,2NS}^{-1} = \frac{1}{2} \sin^2(\eta) S_V(\epsilon), \quad (5.30)$$

mit η dem ‘‘Einstellungswinkel’’ zwischen longitudinaler und transversaler Ankopplung an das Bad und $S_V(\epsilon)$ der symmetrisierten Gleichgewichtskorrelationsfunktion, in der alle Information über das Temperaturverhalten enthalten ist.

Benützen wir noch Gleichgewichtsbeziehung zwischen symmetrisierter und antisymmetrisierter Korrelationsfunktion (3.35), so erhalten wir aus (5.30),

$$T_{1,2NS}^{-1} = \frac{1}{2} \sin^2(\eta) A_V(\epsilon) \coth\left(\frac{\epsilon}{2T}\right). \quad (5.31)$$

Diese von der speziellen Wahl der Umgebung unabhängige Beziehung reduziert sich für eine Umgebung von harmonischen Oszillatoren mit (3.37) auf,

$$T_{1,2NS}^{-1} = \frac{1}{2} \sin^2(\eta) \alpha_V \epsilon \cdot \coth\left(\frac{\epsilon}{2T}\right). \quad (5.32)$$

Gleichung (5.32) wird uns als Referenz für die Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ in Unterabschnitt 5.4.2 dienen.

5. Ergebnisse

Wir werden zeigen, dass wir durch Hinzunahme des dritten Energielevels ein von (5.32) abweichendes Skalierungsverhalten der Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ als Funktion der Temperatur T an den Resonanzstellen $\delta\omega_1 = 0$ sowie $\delta\omega_2 = -\Delta$ erhalten.

Für starke Verstimmungen $|\delta\omega| \gg v, \Delta$ erhalten wir dann wieder das Skalierungsverhalten des Zwei-Niveau-Systems: $T_{1,F}^{-1} \propto \coth(\frac{\omega_f}{2T})$.

Wir beginnen zunächst mit einer Diskussion des Relaxationsratenverhalten als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ bei fester Temperatur T .

5.4.1. Relaxationsratenverhalten als Funktion der Verstimmung bei fester Temperatur

Die Abbildungen 5.10 und 5.11 zeigen die in Sekularer Näherung berechnete Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ bei den Temperaturen $T = \omega_f$ und $T = 3\omega_f$ für die Anfangszustände: $|2, \uparrow\rangle$ sowie dem thermischer Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators.

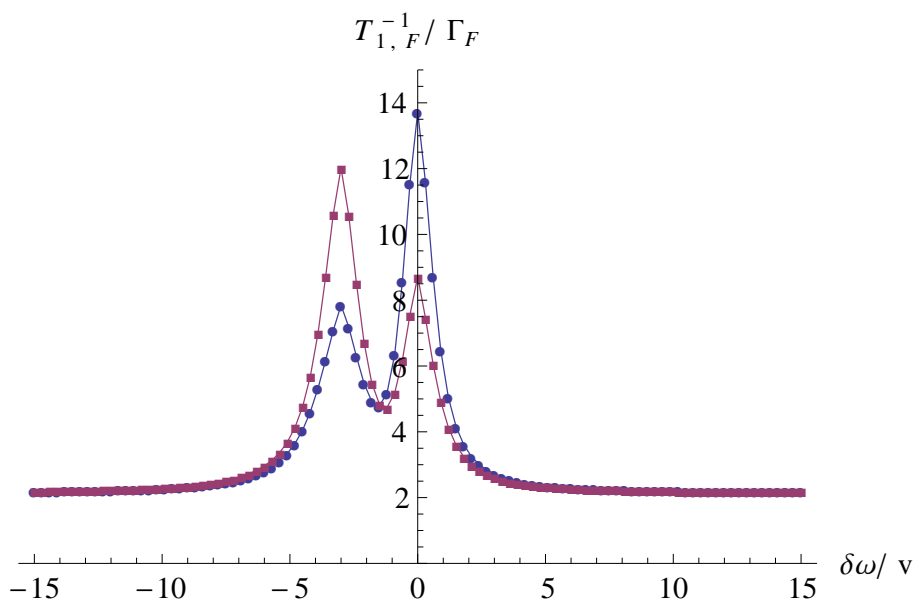


Abbildung 5.10.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung für $T = \omega_f$. blau: thermischer Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators; rot: $|2, \uparrow\rangle$ als Anfangszustand. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

Wir sehen die Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ normiert auf Γ_F .

Vergleichen wir die Fluktuatorrelaxationsrate bei starker Verstimmung $|\delta\omega| \gg v, \Delta$ aus Abb.: 5.10 und 5.11 so erkennen wir eine Zunahme mit steigender Temperatur T . Diese Zunahme der Fluktuatorrelaxationsrate bei starker Verstimmung $\delta\omega \gg v, \Delta$ ist durch die Beziehung (5.32) mit $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_V = \alpha_{X_{2,t}}$ und $\epsilon = \omega_f$ gegeben.

Aufgrund der zunehmend schwächer werdender Wechselwirkung zwischen Fluktuator und

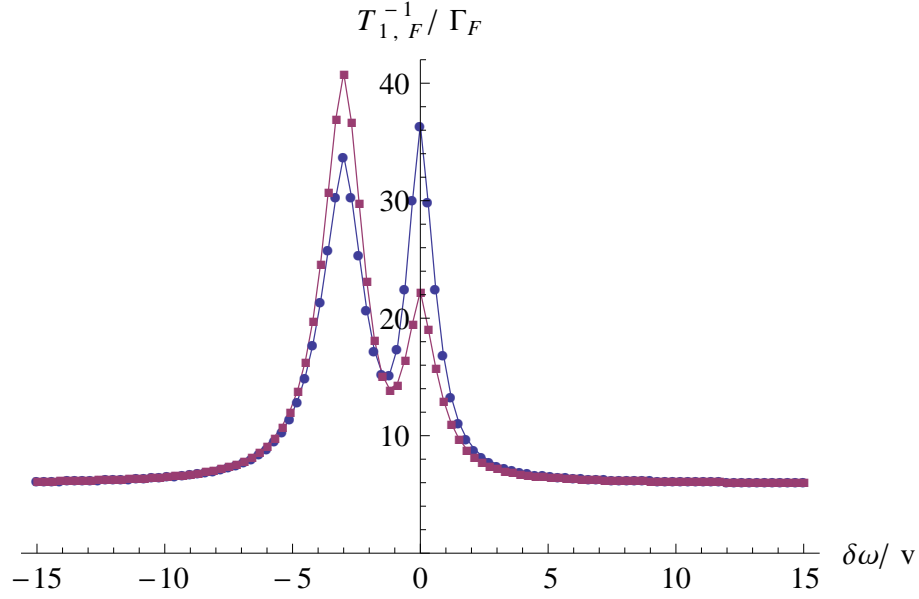


Abbildung 5.11.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung für $T = 3\omega_f$. blau: thermischer Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators; rot: $|2, \uparrow\rangle$ als Anfangszustand. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{\nu}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

3-Level-Qubit, siehe (5.7), verhält sich hier der Fluktuator effektiv wie ein Zwei-Niveau-System mit einem Skalierungsverhalten mit der Temperatur T wie in (5.32).

Ferner erhalten wir analog zu verschwindenden Temperaturen $T = 0$ eine Zunahme der Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ bei den Verstimmungen $\delta\omega_1 = 0$ sowie $\delta\omega_2 = -\Delta$. Also den Stellen maximaler Hybridisierung der Zustände $|1, \downarrow\rangle$, $|0, \uparrow\rangle$ bzw. $|2, \downarrow\rangle$, $|1, \uparrow\rangle$, siehe (5.7).

Desweiteren stellen wir in den Abb.: 5.10, 5.11 fest:

- $T_{1,F}^{-1}(\delta\omega = \delta\omega_2) < T_{1,F}^{-1}(\delta\omega = \delta\omega_1)$ für den thermischen Anfangszustand
- $T_{1,F}^{-1}(\delta\omega = \delta\omega_2) > T_{1,F}^{-1}(\delta\omega = \delta\omega_1)$ für den Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$

Um dieses Verhalten zu verstehen hilft uns die Kenntnis aus Abbildung 5.12. Wir zeigen hier die Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ für $T = 0$, wieder für die beiden Anfangszustände.

Wir erhalten hier nur für den Anfangszustand thermischen Anfangszustand keine Zunahme der Relaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ gegenüber Γ_F an der Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$ (abgesehen von dem Ausläufer des Resonanzpeaks an Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$).

Dies lässt sich damit erklären, dass für verschwindende Temperaturen $T = 0$ keine Anregungen von energetisch niedrigeren Zuständen zu energetisch höheren stattfinden, siehe Unterabschnitt 5.3.3 über den Einfluss des Anfangszustandes.

Desweiteren entspricht dem thermischen Anfangszustand bei $T = 0$ dem Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$. Folglich können die Relaxationskanäle, welche durch die Hybridisierung der Zustände $|2, \downarrow\rangle$ $|1, \uparrow\rangle$ geöffnet werden, siehe Skizze (c) in Abbildung 5.4, keinen Einfluss auf den

5. Ergebnisse

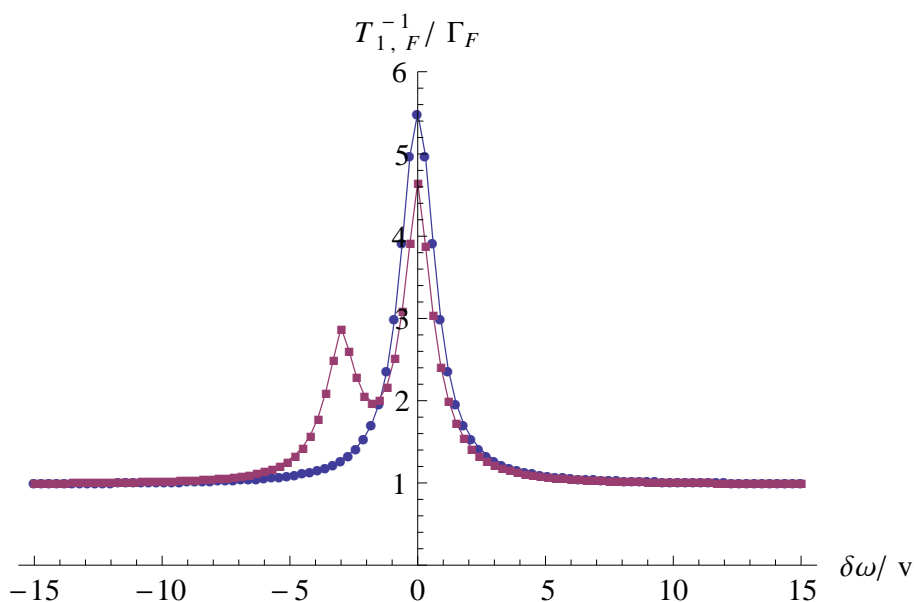


Abbildung 5.12.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung für $T = 0$. blau: thermischer Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators; rot: $|2, \uparrow\rangle$ als Anfangszustand. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

Zerfall des Zustandes $|0, \uparrow\rangle$ haben.

Nehmen wir noch zur Kenntnis, dass der "Endzustand" $\rho(t)_{\text{end}}$ durch das statistische Gemisch nach gegeben ist (5.25). So können wir das Verhalten der Resonanzpeaks in den Abbildungen 5.10 und 5.11 für die beiden Anfangszustände deuten.

Die stärkere Relaxationsrate an der Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$ gegenüber Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$ für den Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$ lässt sich darauf zurückführen, dass die thermische Energie bereits so groß ist, dass das statistische Gewicht der Besetzung der Eigenzustände des "Endzustandes" $\rho(t)_{\text{end}}$ zunehmend zu den hybridisierten Zuständen $|2, \downarrow\rangle$ und $|1, \uparrow\rangle$ wandert. Dadurch können diese mehr zur Relaxation des Anfangszustandes $|2, \uparrow\rangle$, als diese aufgrund der Hybridisierung der energetisch darunter Liegenden: $|1, \downarrow\rangle$ und $|0, \uparrow\rangle$, beitragen. Deswegen erhalten wir bei der Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$ eine stärkere Relaxationsrate als an der Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$.

Für den thermischen Anfangszustand erhalten wir das entgegengesetzte Verhalten, also eine stärkere Relaxationsrate an der Resonanzstelle $\delta\omega_1$ im Vergleich zu der Resonanzstelle $\delta\omega_2$.

Qualitativ erschließt sich dieses Ergebnis aus der vorangegangenen Argumentation. Da der thermische Anfangszustand auch zu einer Bevölkung der energetisch niedrigeren Zustände führt, können die Relaxationskanäle aus der Hybridisierung der Zustände $|1, \downarrow\rangle$ und $|0, \uparrow\rangle$ hier, im Gegensatz zu dem Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$, mehr zu der Relaxation des Anfangszustandes beitragen.

Für genügend hohe Temperaturen erhalten wir dann auch wieder eine stärkere Relaxationsrate an der Resonanzstelle $\delta\omega_1 = -\Delta$ im Vergleich zu $\delta\omega_1 = 0$ wie die Abbildung 5.13

für die Temperatur $T = 10\omega_f$ zeigt.

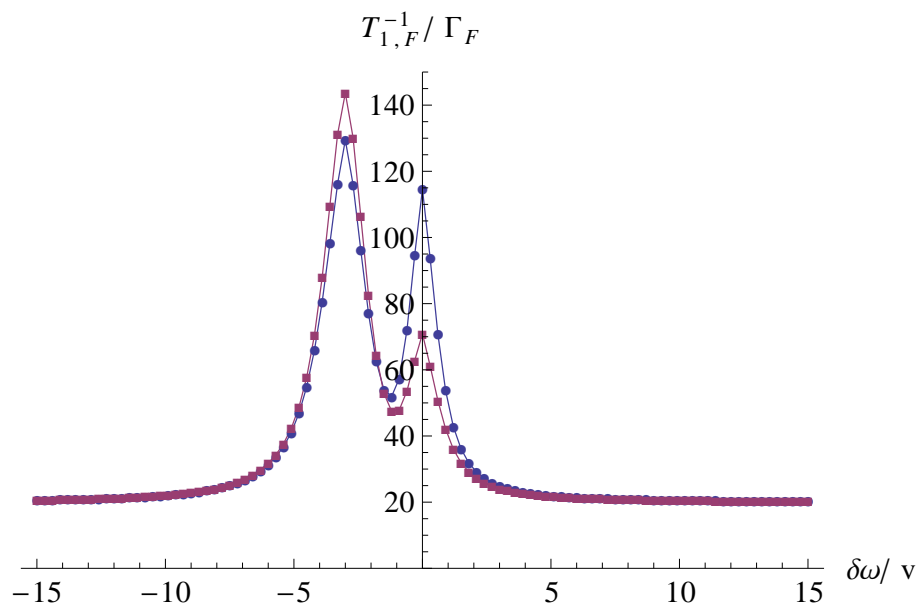


Abbildung 5.13.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung für $T = 10\omega_f$. blau: thermischer Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators; rot: $|2, \uparrow\rangle$ als Anfangszustand. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

Thermische Aktivierung von Resonanzen

Im Gegensatz zu $T = 0$, können Resonanzen an den durch (5.16) gegebenen Stellen auch für Anfangszustände auftreten, die energetisch tiefer als die in (5.13) sind.

Abbildung 5.14 zeigt die in Sekularer Näherung berechnete Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}$ als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ für die Temperaturen $T = 0$, $T = \omega_f$ und $T = 3\omega_f$ für den Anfangszustand: $|0, \uparrow\rangle$.

5. Ergebnisse

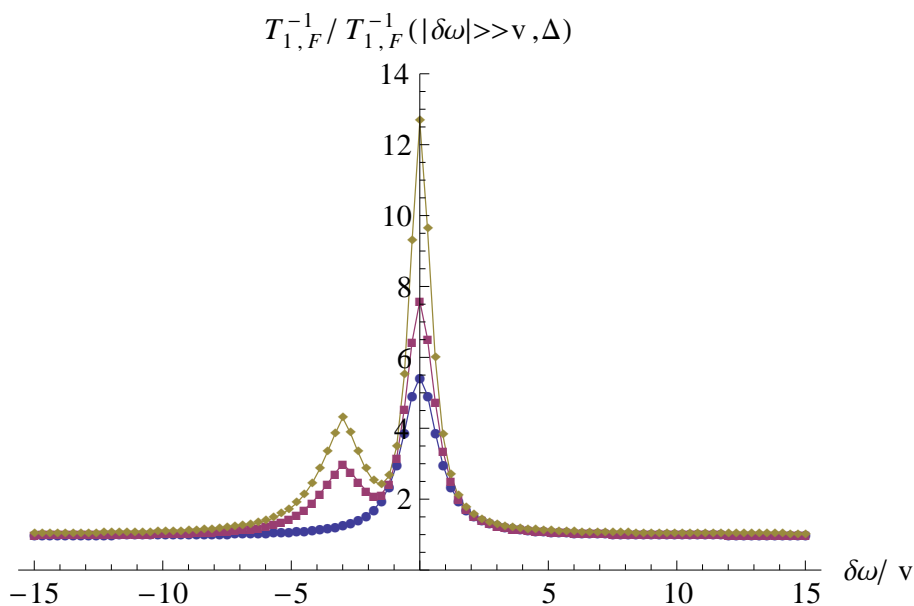


Abbildung 5.14.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Verstimmung mit Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$. blau: $T = 0$; rot: $T = \omega_f$; gelb: $T = 3\omega_f$. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

Wir sehen:

- blaue Kurve: $T_{1,F}^{-1}$ für $T = 0$
- rote Kurve: $T_{1,F}^{-1}$ für $T = \omega_f$
- gelbe Kurve: $T_{1,F}^{-1}$ für $T = 3\omega_f$

Um die Kurven besser zu vergleichen zu können, wählen wir hier als Normierung die Fluktuatorrelaxationsrate bei starker Verstimmung: $T_{1,F}^{-1}(|\delta\omega| \gg v, \Delta)$.

Wir erkennen das mit zunehmender Temperatur T die zweite Resonanz bei $\delta\omega_2 = -\Delta$ aufgrund der Besetzung der Zustände $|2, \downarrow\rangle$ und $|1, \uparrow\rangle$ immer mehr zum Vorschein kommt.

5.4.2. Relaxationsratenverhalten als Funktion der Temperatur bei fester Verstimmung

Abbildung 5.15 zeigt die berechneten Relaxationsratenkurven des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit.

Wir sehen die Fluktuatorrelaxationsraten $T_{1,F}^{-1}$ als Funktion der Temperatur T an den Resonanzstellen $\delta\omega_1 = 0$ sowie $\delta\omega_2 = -\Delta$, jeweils für die beiden Anfangszustände: $|2, \uparrow\rangle$ sowie thermischer Anfangszustand. Zum Vergleich die Fluktuatorrelaxationsraten $T_{1,F}^{-1}$ bei großer Verstimmung $|\delta\omega| \gg v, \Delta$.

Die einzelnen Kurven sind dabei:

- blaue Kurve: $T_{1,F}^{-1}(T)$ für die Resonanzstelle: $\delta\omega_1 = 0$ mit dem Anfangszustand: $|2, \uparrow\rangle$

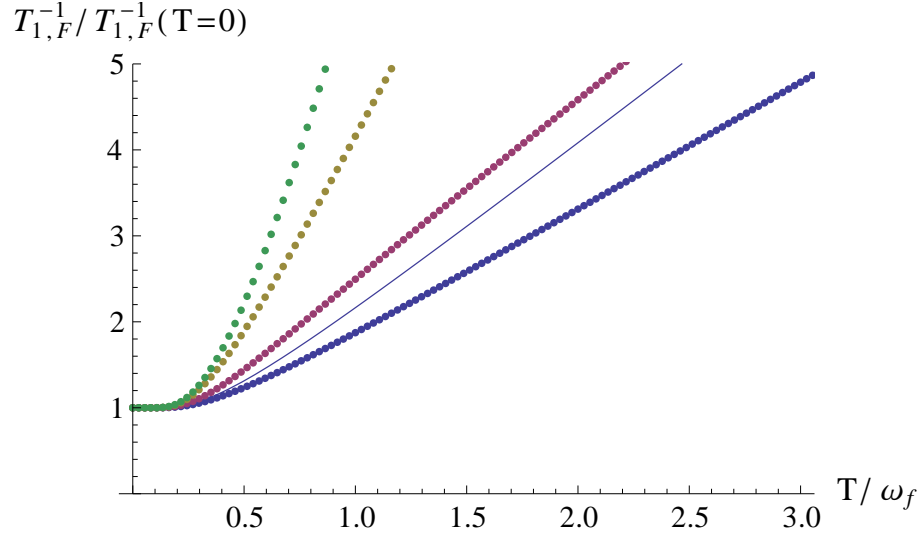


Abbildung 5.15.: Relaxationsrate des Fluktuators wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit als Funktion der Temperatur für feste Verstimmung und verschiedene Anfangszustände. blau: Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$ mit Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$; rot: Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$ mit thermischen Anfangszustand des 3-Level-Qubits bei vollständiger Anregung des Fluktuators; gelb: Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$ mit Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$; grün: Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$ mit thermischen Anfangszustand.; durchgezogene Linie: $|\delta\omega| \gg v, \Delta$ mit Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$ bzw. thermischer Anfangszustand. Gemeinsame Parameter: $n = 3$, $\frac{\Delta}{\Gamma_F} = 10^4$, $\frac{v}{\Gamma_F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_F}$, $\frac{\omega_f}{\Gamma_F} = 10^6$ und $\frac{\Gamma_Q}{\Gamma_F} = 10$.

- rote Kurve: $T_{1,F}^{-1}(T)$ für die Resonanzstelle: $\delta\omega_1 = 0$ mit dem thermischen Anfangszustand
- gelbe Kurve: $T_{1,F}^{-1}(T)$ für die Resonanzstelle: $\delta\omega_2 = -\Delta$ mit dem Anfangszustand: $|2, \uparrow\rangle$
- grüne Kurve: $T_{1,F}^{-1}(T)$ für die Resonanzstelle: $\delta\omega_2 = -\Delta$ mit dem thermischen Anfangszustand
- durchgezogene Linie: $T_{1,F}^{-1}(T)$ bei großer Verstimmung $|\delta\omega| \gg v, \Delta$ für $|2, \uparrow\rangle$, bzw. thermischen Anfangszustand

Wir wählen als Normierung die jeweilige Nulltemperatur Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}(T = 0)$. Damit stellen die Kurven ein Maß für das Skalierungsverhalten mit der Temperatur T dar.

Die durchgezogene Linie zeigt die Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}^{-1}(T = 0)$ bei großer Verstimmung $|\delta\omega| \gg v, \Delta$. Wir erhalten für diese das Skalierungsverhalten des Zwei-Niveau-Systems wieder (5.32),

$$\frac{T_{1,F}^{-1}(T)}{T_{1,F}^{-1}(T = 0)} \Big|_{|\delta\omega| \gg v, \Delta} \longrightarrow \coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right). \quad (5.33)$$

Ferner ist das Skalierungsverhalten unabhängig von den zwei von uns gewählten Anfangszuständen.

5. Ergebnisse

Für die Resonanzstellen $\delta\omega_1, \delta\omega_2$ erhalten wir hingegen ein klar abweichendes Skalierungsverhalten mit der Temperatur T .

Ferner bemerken wir eine stärkere Zunahme der $T_{1,F}^{-1}$ mit steigender Temperatur T für den thermischen Anfangszustand im Gegensatz zu dem Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$.

Wir wollen hier eine qualitative Erklärung für das abweichende Verhalten der Fluktuatorrelaxationsraten $T_{1,F}^{-1}$ an den Resonanzstellen geben.

Wir beginnen dazu mit einer Diskussion des Temperaturverhaltens des Fluktuators wechselwirkend mit einem 2-Level-Qubit. Wir zeigen, dass das Skalierungsverhalten der Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ mit der Temperatur T auch unter der Wechselwirkung des 2-Level-Qubits noch der des Zwei-Niveau-Systems ist, (5.32).

Wir wollen dies im Folgenden explizit für den Resonanzfall $\delta\omega = 0$ vorführen, den Fall stärkster Wechselwirkung.

Wir berechnen dazu zunächst die Eigenwerte der Mastergleichung des System Fluktuator wechselwirkend mit einem 2-Level-Qubit beide wiederum transversal gekoppelt an die verschiedenen und unabhängigen Bäder.

Die Mastergleichung schreibt sich damit wie folgt,

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{11} \\ \dot{\rho}_{22} \\ \dot{\rho}_{33} \\ \dot{\rho}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{21} - W_{31} & W_{12} & W_{13} & 0 \\ W_{21} & -W_{12} - W_{42} & 0 & W_{24} \\ W_{31} & 0 & -W_{13} - W_{43} & W_{34} \\ 0 & W_{42} & W_{43} & -W_{24} - W_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ \rho_{33} \\ \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

mit den Eigenzuständen des Systemhamiltonians H_S ,

$$|1\rangle := |1, \uparrow\rangle, \quad (5.35)$$

$$|2\rangle := |1+\rangle, \quad (5.36)$$

$$|3\rangle := |1-\rangle, \quad (5.37)$$

$$|4\rangle := |0, \downarrow\rangle. \quad (5.38)$$

Dabei haben wir nur die Übergangsraten mit endlichen Übergangsmatrixelemente beschrieben.

Wir vernachlässigen alle Energieunterschiede zwischen den verschiedenen Übergangsraten,

$$\omega_{m'm} \rightarrow \omega_f. \quad (5.39)$$

Diese Näherung ist für $\delta\omega \ll \omega_f$ und kleines $\alpha_{X_{i,t}} \ll 1$ berechtigt.

Weiterhin addieren sich alle Übergangsraten in den Subsystemen einfach (5.20a),

$$W_{m'm}(T) = W_{m'm,Q}(T) + W_{m'm,F}(T). \quad (5.40)$$

Damit können wir (5.34) wie folgt darstellen,

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{11} \\ \dot{\rho}_{22} \\ \dot{\rho}_{33} \\ \dot{\rho}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2W(T) & c(T)W(T) & c(T)W(T) & 0 \\ W(T) & -c(T)W(T) - W(T) & 0 & c(T)W(T) \\ W(T) & 0 & -c(T)W(T) - W(T) & c(T)W(T) \\ 0 & W(T) & W(T) & -2c(T)W(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ \rho_{33} \\ \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

mit $c(T) := e^{-\frac{\omega_f}{T}}$ dem thermischen Exponentialfaktor und $W(T) := D \cdot \omega_f \cdot \left[1 + \coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right) \right]$ der ‘‘Gesamtübergangsrate‘‘.

Wir wollen diese Darstellung im Folgenden beweisen.

Dazu berechnen wir die Übergangsraten mit (2.33a) und erhalten,

$$W_{m'm,Q}(T) = \frac{1}{4} \beta_{1,t}^2 |\langle m' | \sigma_y | m \rangle|^2 \alpha_{X_{1,t}} \cdot \omega_f \left[1 + \coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right) \right], \quad (5.42a)$$

$$W_{m'm,F}(T) = \frac{1}{4} \beta_{2,t}^2 |\langle m' | \tau_x | m \rangle|^2 \alpha_{X_{2,t}} \cdot \omega_f \left[1 + \coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right) \right]. \quad (5.42b)$$

Dabei reduziert sich der ‘‘Impulsoperator’’ \hat{p} für ein zwei-dimensionales System auf die Paulimatrix σ_y .

Da wir den Resonanzfall $\delta\omega = 0$ studieren, bei der wir eine vollständige Hybridisierung der Zustände $|0, \uparrow\rangle$ und $|1, \downarrow\rangle$ vorliegen haben, erhalten wir für die Betragsquadrate der Übergangsmatrixelemente,

$$|\langle m' | \sigma_y | m \rangle|^2 = |\langle m' | \tau_x | m \rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad (5.43)$$

Wir somit (5.40) schreiben als,

$$W(T) = D \cdot \omega_f \cdot \left[1 + \coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right) \right], \quad (5.44)$$

mit,

$$D := \frac{1}{8} \left(\beta_{1,t}^2 \alpha_{X_{1,t}} + \beta_{2,t}^2 \alpha_{X_{2,t}} \right), \quad (5.45a)$$

$$D \geq 0. \quad (5.45b)$$

Wir berechnen damit die Eigenwerte von (5.41) zu,

$$\lambda_1 = 0, \quad (5.46a)$$

$$\lambda_2 = -W(T) - c(T)W(T) = -D \coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right), \quad (5.46b)$$

$$\lambda_3 = \lambda_2, \quad (5.46c)$$

$$\lambda_4 = 2\lambda_2. \quad (5.46d)$$

Die Eigenwerte λ_2 , λ_3 und λ_4 zeigen also alle das gleiche Skalenverhalten mit der Temperatur T .

Berechnen wir die Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ nach (4.15); so skaliert auch diese, für Anfangszustände welche durch die zu λ_2 , λ_3 zugehörigen Eigenmoden repräsentiert werden, mit $\coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right)$.

Dass das Skalenverhalten der Eigenwerte mit $-\coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right)$ durch Hinzunahme eines weiteren Qubitlevels verloren geht, zeigt Abbildung 5.16 für die Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$, sowie Abbildung 5.17 für die Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$.

5. Ergebnisse

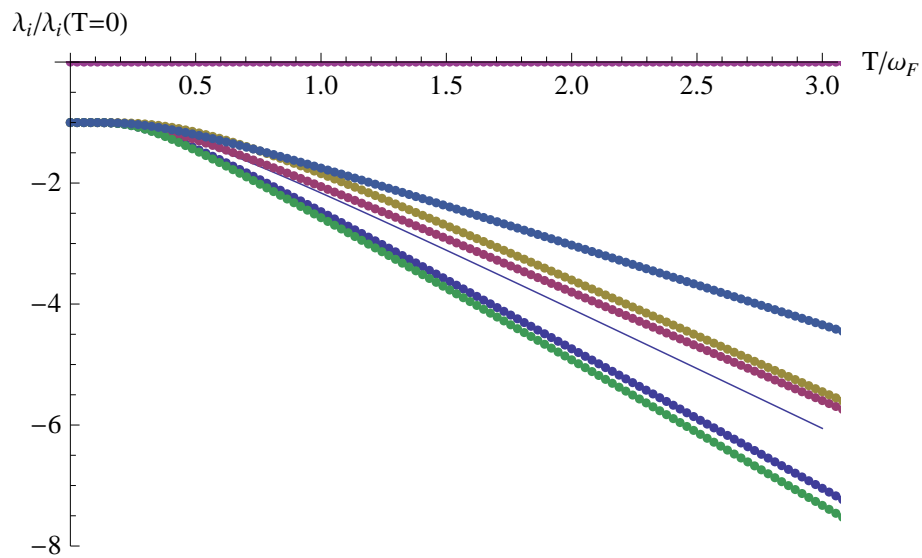


Abbildung 5.16.: Die sechs Eigenwerte der Mastergleichung für das 3-Level-Qubit-Fluktuator System als Funktion der Temperatur an der Resonanzstelle $\delta\omega_1 = 0$; durchgezogene Linie: $f(T) = -\coth(\frac{\omega_f}{2T})$.

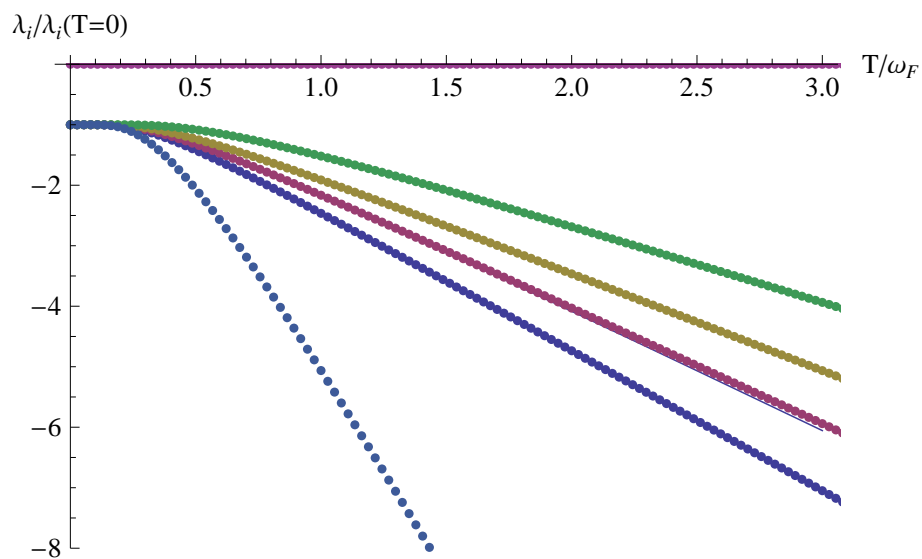


Abbildung 5.17.: Die sechs Eigenwerte der Mastergleichung für das 3-Level-Qubit-Fluktuator System als Funktion der Temperatur an der Resonanzstelle $\delta\omega_2 = -\Delta$; durchgezogene Linie: $f(T) = -\coth(\frac{\omega_f}{2T})$.

5.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten

Wir sehen in den Abbildungen die sechs numerisch berechneten Eigenwerte der Mastergleichung des Systems: Fluktuator wechselwirkend mit einem 3-Level-Qubit mit den gleichen Ankopplungen an die Bäder wie zuvor. Zum Vergleich zeigen wir die Funktion $f(T) = -\coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right)$.

Aufgrund der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit erhalten wir wieder einen Eigenwert mit $\lambda_1 = 0$, siehe A.2.5. Die anderen Eigenwerte zeigen ein klar abweichendes Skalierungsverhalten zu der Vergleichsfunktion $f(T)$.

Nach (4.15) können wir somit für die Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}(T)$ kein Skalenverhalten mit $\coth\left(\frac{\omega_f}{2T}\right)$ mehr erwarten. Das ist der Grund für das abweichende Skalierungsverhalten der Relaxationsrate des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}(T)$, wie wir es in 5.15 sehen.

Wir vermuten, dass resonante Wechselwirkung des Fluktuators mit höheren Energielevels des Phasenqubits das Verhalten in 5.3 (a) erklären könnte.

Eine solche Wechselwirkung sollte jedoch erst durch eine thermische Anregung der höheren Energielevels erfolgen, da wir bei der im Experiment 5.3 (a) gewählten Verstimmung von $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ keine Wechselwirkung des Fluktuators in 5.1 beobachten. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt demonstrieren.

5.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten

In diesem Abschnitt führen wir einen Vergleich der experimentell bestimmten Relaxationszeitkurven des Fluktuators aus Ref.: [32], siehe Abschnitt 5.1, mit der Theorie durch.

Die dem Experiment zugrunde liegenden Parameter waren dabei:

Experimentelle Daten

- $\omega_f = 7.735\text{GHz}$
- $v: 23\text{MHz} \simeq 10^{-3}\omega_f$
- $\Gamma_Q = \frac{1}{2}\beta_{1,t}^2\alpha_{X_{1,t}}\omega_{01}: 110\text{ns} \simeq 10^{-3}\omega_f \rightarrow$ Sekulare Näherung gültig
- $\Gamma_F = \frac{1}{2}\beta_{2,t}^2\alpha_{X_{2,t}}\omega_f: 410\text{ns} \simeq 10^{-4}\omega_f \rightarrow$ Sekulare Näherung gültig
- $T: 35\text{mK} \simeq 10^{-1}\omega_f$

Dabei wurde die Kopplungskonstante v mittels Qubitspektroskopie aus dem Levelsplitting in Resonanz $\delta\omega = 0$ zwischen Fluktuator und Phasenqubit bestimmt. Die Anregungsenergie des Fluktuators ω_f wurde ebenso aus den spektroskopischen Daten ermittelt, siehe Abbildung 1.2.

Γ_Q und Γ_F die Relaxationsraten der isolierten Zwei-Niveau-Systeme bei der Temperatur $T = 0$ entsprechen in sehr guter Näherung den experimentell bestimmten Relaxationsraten bei $T = 35\text{mK}$, siehe (5.32).

Die Eigenenergien des Phasenqubithamiltonoperators (1.2), berechnen wir durch Diskretisierung des Potentials Ref.: [42]. Die für die Berechnung der Eigenenergien benötigten Werte des kritischen Stromes $I_c = 984\text{nA}$, der Kapazität $C = 850\text{fF}$ und der Induktivität $L = 720\text{pH}$ entnahmen wir Ref.: [25]. Hier sind alle Werte des in Ref.: [32] verwendeten Chips

5. Ergebnisse

zusammengetragen.

Wir möchten an dieser Stelle einen Vergleich Eigenenergien des Phasenqubithamiltonoperators (1.2) mit denen des von uns eingeführten effektiven n-Level-Qubit Hamiltonians H_Q , siehe (3.3), durchführen.

Die nachfolgende Tabelle zeigt einen Vergleich der Übergangsenergien zwischen benachbarter Eigenzustände: $\omega_{s+1} - \omega_s$ mit,

$$H_Q = \omega_s \sum_{s=0}^{n-1} |s\rangle \langle s|. \quad (5.47)$$

Wir führen diesen Vergleich für eine Übergangsenergie von $\omega_1 - \omega_0 = 7.735\text{GHz}$ durch.

	Phasenqubithamiltonian	n-Level-Qubit	$\Delta\omega/\omega$
$\omega_1 - \omega_0$	7.735GHz	7.735GHz	0
$\omega_2 - \omega_1$	7.642GHz	7.642GHz	0
$\omega_3 - \omega_2$	7.546GHz	7.549GHz	10^{-4}
$\omega_4 - \omega_3$	7.445GHz	7.456GHz	10^{-3}

Wie dieser Vergleich also aufzeigt scheint der effektive Hamiltonian H_Q zumindest für kleine Energielevels n eine gute Näherung zu sein.

Für die Berechnung der in diesem Abschnitt vorgestellten Relaxationszeitkurven werden wir dennoch die Eigenenergien aus der Numerik verwenden. Der n-Level-Qubit Hamiltonian H_Q diente uns lediglich für die qualitative Analyse des Systems aus den vorangegangenen Abschnitten.

5.5.1. Relaxationszeitkurven in Abhängigkeit von der Verstimmung

Wir berechnen im Folgenden die Relaxationzeiten des Fluktators $T_{1,F}$ unter dem Einfluss eines Phasenqubits mit insgesamt fünf Energielevels.

Wir erachten die Hinzunahme von fünf Energielevels als vernünftig um eine Verbreiterung der Resonanzbreite σ von etwa $\sigma \sim 4\text{-}5\text{GHz}$ zu erhalten.

Aufgrund der niedrigen Temperatur von $T = 35\text{mK}$ wählen wir den energetisch höchsten Zustand $|4, \uparrow\rangle$ als Anfangszustand. Siehe über den Einfluss des Anfangszustandes auf die Relaxationszeitkurve Unterabschnitt 5.3.3.

Wir erwarten für diesen Anfangszustand ein Auftreten von Resonanzen an den durch Gleichung: (5.16) gegebenen Verstimmungen. Durch die Überlagerung dieser einzelnen Resonanzen könnte dadurch das Bild einer großen Resonanz entstehen.

Die dabei notwendigen hohen Mikrowellenintensitäten zur Antreibung des Fluktators erachten wir als Mechanismus zur Anregung höherer Phasenqubitlevels auch bei Verstimmungen außerhalb der Resonanzstelle $\delta\omega = 0$.

Abbildung 5.18 zeigt die in Sekularer Näherung berechnete Fluktuatorrelaxationszeit $T_{1,F}$ als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ für die zugrundeliegenden experimentellen Daten.

Wir stellen fest, dass die Breite σ_s der einzelnen Resonanzen zu gering zu sein scheint um

5.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten

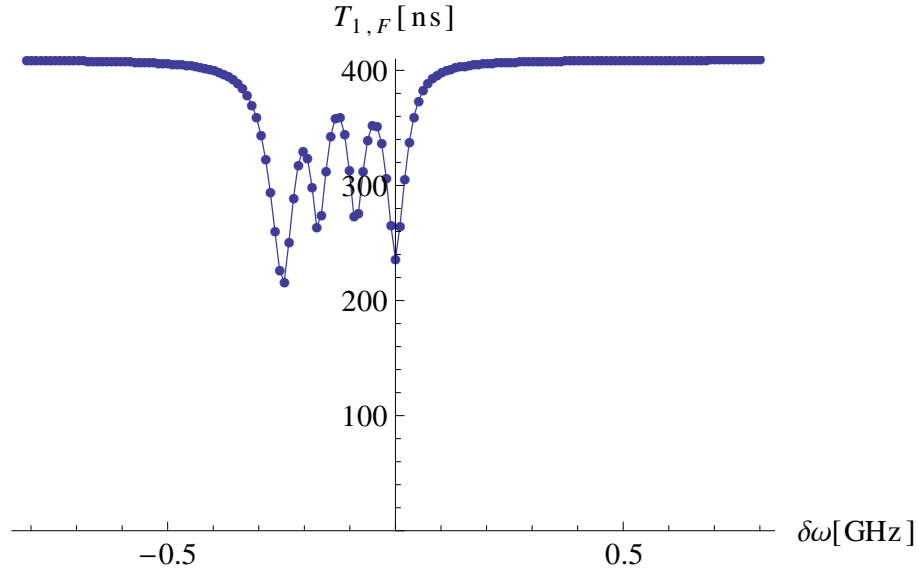


Abbildung 5.18.: Relaxationszeit $T_{1,F}$ des Fluktuators unter der Wechselwirkung eines Phasenqubits mit insgesamt fünf Energielevels als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ für den Anfangszustand $|4, \uparrow\rangle$. Parameter: $\omega_f = 7.735\text{GHz}$, $v = 23\text{MHz}$, $\Gamma_Q = 110\text{ns}$, $\Gamma_F = 410\text{ns}$ und $T = 35\text{mK}$.

durch eine Überlagerung das Bild einer einzigen großen Resonanz wie in Abbildung 5.1 (d) erscheinen zu lassen.

Wie in Abschnitt 5.3.3, Gleichung: (5.18) gezeigt wurde trägt zur einer Verbreiterung der Resonanzen maßgeblich die Kopplungskonstante v bei.

Wir wollen dazu das Ausmaß einer größeren Kopplungskonstante v , als der im Experiment ermittelten Kopplungskonstante v_{exp} , abschätzen.

Dazu berechnen wir die Relaxationszeiten für die folgenden Kopplungskonstanten $v = v_{\text{exp}}, 2v_{\text{exp}}, 3v_{\text{exp}}, 4v_{\text{exp}}$. Das Ergebnis sehen wir in Abbildung 5.19.

Die einzelnen Farben gehören dabei zu folgenden Kurven,

- blau: $T_{1,F}$ mit $v = v_{\text{exp}}$,
- rot: $T_{1,F}$ mit $v = 2v_{\text{exp}}$,
- gelb: $T_{1,F}$ mit $v = 3v_{\text{exp}}$,
- grün: $T_{1,F}$ mit $v = 4v_{\text{exp}}$,

mit $v_{\text{exp}} = 23\text{MHz}$ der experimentell bestimmten Kopplungskonstante.

Wir erkennen, dass mit zunehmender Kopplungskonstante v sich die einzelnen Resonanzen zunehmend weniger voneinander unterscheiden lassen. Die gewählten Kopplungskonstanten sind jedoch so groß, dass wir dies nur als eine Demonstration ansehen können.

Wir fassen damit zusammen, dass wir durch die Hinzunahme höherer Energielevels des Phasenqubits ein Auftreten weiterer Resonanzen bei $\delta\omega < 0$ erhalten. Das würde die starke Asymmetrie der Relaxationszeitkurve zu negativen Verstimmungen hin erklären. Die

5. Ergebnisse

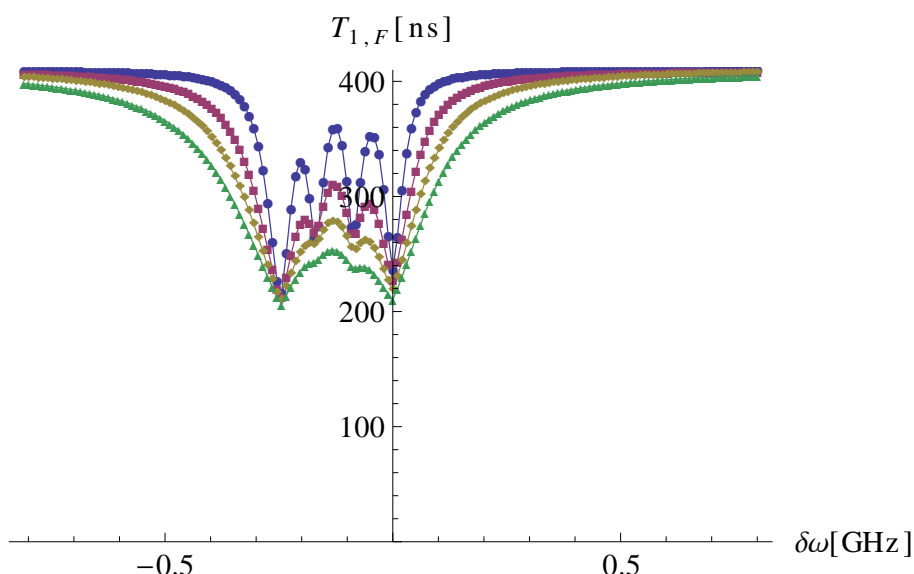


Abbildung 5.19.: Relaxationszeit $T_{1,F}$ des Fluktuators unter der Wechselwirkung eines Phasenqubits mit insgesamt fünf Energielevels als Funktion der Verstimmung $\delta\omega$ für den Anfangszustand $|4, \uparrow\rangle$. blau: $v = v_{\text{exp}}$; rot: $v = 2v_{\text{exp}}$; gelb: $v = 3v_{\text{exp}}$; grün: $v = 4v_{\text{exp}}$. Gemeinsame Parameter: $\omega_f = 7.735\text{GHz}$, $\Gamma_Q = 110\text{ns}$, $\Gamma_F = 410\text{ns}$ und $T = 35\text{mK}$.

Breite σ_s der einzelnen Resonanzen scheint jedoch zu gering zu sein, um das Bild einer großen Resonanz erscheinen zu lassen.

5.5.2. Relaxationszeitkurven in Abhängigkeit von der Temperatur

In Abschnitt 5.4.2 hatten wir das Relaxationsratenverhalten des Fluktuators $T_{1,F}^{-1}$ als Funktion der Temperatur T unter dem Einfluss eines 3-Level-Qubits für den Anfangszustand $|2, \uparrow\rangle$ studiert.

Wir hatten dabei gezeigt, dass wir an den Resonanzstellen $\delta\omega_s$ eine Abweichung des Relaxationsratenverhaltens mit der Temperatur T im Vergleich zu der des Zwei-Niveau-Systems erhalten. Siehe dazu Abbildung 5.15.

Für die im Experiment vorliegende Verstimmung von $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ bei einer Temperatur von $T = 35\text{mK}$ sehen wir jedoch keine Zunahme der Relaxationsrate, d.h. keine Wechselwirkung, siehe Abbildung 5.1 (d). Dennoch beobachten wir keinen für ein Zwei-Niveau-System typischen Verlauf der Relaxationsrate mit der Temperatur T , siehe Abbildung 5.3 (a). Der Grund könnte in der mikroskopischen Umgebung des Fluktuators zu suchen sein (kein harmonisches Bad).

Wir vermuten jedoch, dass durch ansteigende Temperaturen T es zu einer resonanten Wechselwirkung des Fluktuators mit höheren Energielevels des Phasenqubit kommt, siehe Unterabschnitt 5.4.1 über die thermische Aktivierung höherer Resonanzen.

Diese Wechselwirkung sollte dann analog zu einer Veränderung der Relaxationszeit als Funktion der Temperatur T führen. Insbesondere sollte diese Wechselwirkung zu einer Zunahme der Relaxationsrate mit steigender Temperatur T führen, da die Relaxationsrate des Phasenqubits mit $\Gamma_Q = 110\text{ns}$ größer als die des Fluktuators ist: $\Gamma_F = 410\text{ns}$. Siehe da-

5.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten

zu auch über den Einfluss der Verhältnisse zwischen Γ_Q und Γ_F auf die Relaxationsrate, Abbildung 5.5.

Wir wollen diesen Effekt im Folgenden für die zugrundeliegenden experimentellen Daten überprüfen.

Dazu berechnen wir zunächst die Eigenenergien ω_s , respektive die Übergangsenergien $\omega_{s+1} - \omega_s$ zwischen den benachbarten Energiezuständen des Phasenqubithamiltonians (1.2) für die im Experiment gewählte Verstimmung $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$.

- $\omega_1 - \omega_0 = 8.235\text{GHz}$
- $\omega_2 - \omega_1 = 8.156\text{GHz}$
- $\omega_3 - \omega_2 = 8.081\text{GHz}$
- $\omega_4 - \omega_3 = 7.919\text{GHz}$
- $\omega_5 - \omega_4 = 7.833\text{GHz}$
- $\omega_6 - \omega_5 = 7.745\text{GHz}$
- $\omega_7 - \omega_6 = 7.765\text{GHz}$

Für eine resonante Wechselwirkung bei der Verstimmung $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ zwischen dem Phasenqubit und dem Fluktuator mit der Eigenfrequenz $\omega_f = 7.735\text{GHz}$ sollten wir demnach die Übergangsenergie $\omega_6 - \omega_5 = 7.745\text{GHz}$ in Betracht ziehen.

Für die Übergangsenergie $\omega_6 - \omega_5 = 7.745\text{GHz}$ müssen wir also mindestens sieben Energielevels des Phasenqubits einbeziehen.

Da wir keine Zunahme der Relaxationsrate an der Verstimmung $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ für die sehr tiefe Temperatur von $T = 35\text{mK} \simeq 10^{-1}\omega_f$ erhielten, siehe Abbildung 5.1 (d), sollte das Phasenqubit bei Initialisierung des Fluktuators nicht über das fünfte Energielevel hinaus angeregt worden sein.

Den Anfangszustand des Phasenqubits kennen wir jedoch nicht. Die folgenden Rechnungen stellen demnach Demonstrationen dar. Wir wählen die Anfangszustände $|4, \uparrow\rangle$, $|3, \uparrow\rangle$ sowie $|0, \uparrow\rangle$.

Der Anfangszustand $|4, \uparrow\rangle$ stellt den energetisch höchsten Zustand dar, für den wir gerade noch keine resonante Wechselwirkung zwischen Fluktuator und Phasenqubit bei der Temperatur $T = 35\text{mK}$ erwarten, siehe dazu Skizze 5.20.

Alle energetisch darüber liegenden Anfangszustände ergeben resonante Wechselwirkung für $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ und Temperatur $T = 35\text{mK}$. Die anderen beiden Anfangszustände $|3, \uparrow\rangle$ sowie $|0, \uparrow\rangle$ dienen als Vergleich.

Wir sehen die Ergebnisse in Abbildung 5.21.

Die einzelnen Kurven sind:

- blaue Kurve: $T_{1,F}$ für den Anfangszustand: $|4, 1\rangle$
- rote Kurve: $T_{1,F}$ für den Anfangszustand: $|3, 1\rangle$
- gelbe Kurve: $T_{1,F}$ für den Anfangszustand: $|0, 1\rangle$

5. Ergebnisse

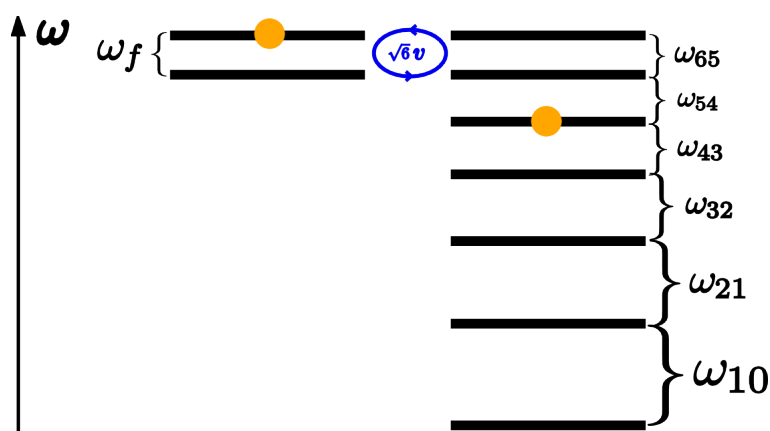


Abbildung 5.20.: Levelstrukturen schematisch. links: Fluktuator mit Energieaufspaltung ω_f ; rechts: 7-Level Phasenqubit. Orangefarbener Punkt verdeutlicht den Anfangszustand $|4, \uparrow\rangle$, den energetisch höchsten Zustand bei der noch keine Wechselwirkung für $T \simeq 0$ zu erwarten ist. Resonanter Übergang zwischen ω_f und ω_{65} .

- blaue durchgezogene Linie: $f(T) = 410 \cdot \tanh\left(\frac{\omega_f}{2T}\right)$ ns

Der rot schattierte Bereich zeigt das aus dem Experiment angegebene Sigmaintervall mit $g(t) = 410\text{ns} - aT^2$ und $a = 4.96\mu\text{s} \pm 0.71\mu\text{s}$.

Wie erwartet erhalten wir für die Anfangszustände $|4, 1\rangle$ und $|3, 1\rangle$ aufgrund der thermischen Anregung Abweichungen zu dem Verhalten des Zwei-Niveau-Systems (blaue Linie) mit zunehmender Temperatur T . Hingegen ist die Fluktuatorrelaxationszeit $T_{1,F}$ für den Anfangszustand $|0, 1\rangle$ gleich der Relaxationszeit des Fluktuators ohne Wechselwirkung mit dem Phasenqubit. Die Temperaturen $T \leq 1\text{K}$ sind zu gering um das Phasenqubit genügend hoch anzuregen.

Wie diese Demonstration aufzeigt, erhalten wir qualitativ eine Abweichung der Fluktuatorrelaxationsrate $T_{1,F}$ von der des Zwei-Niveau-Systems. Das Ausmaß der Abweichung ist jedoch zu gering um auch hier das experimentelle Resultat: Abbildung 5.3 (a) quantitativ wiederzugeben.

5.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten

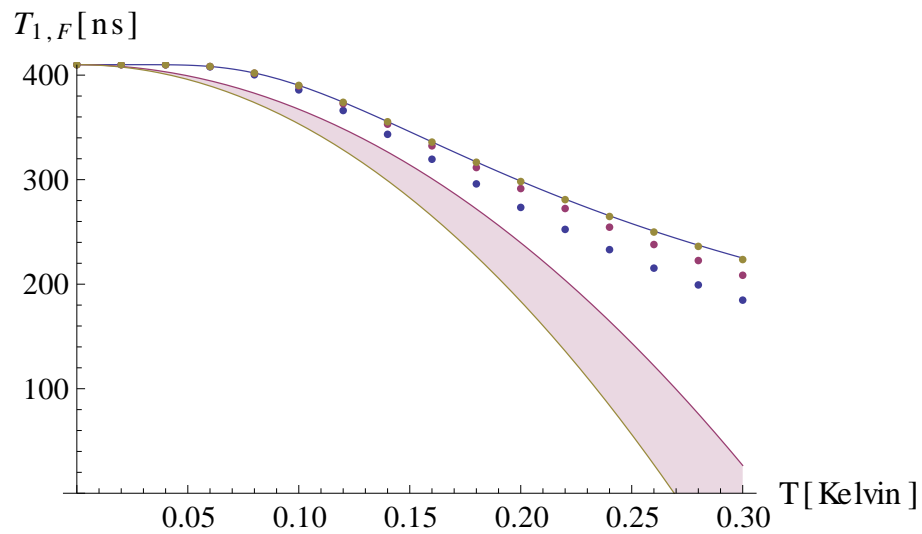


Abbildung 5.21.: Relaxationszeit $T_{1,F}$ des Fluktuators unter der Wechselwirkung eines Phasenqubits mit insgesamt sieben Energielevels als Funktion der Temperatur T . blau: Anfangszustand $|4, \uparrow\rangle$; rot: Anfangszustand $|3, \uparrow\rangle$; gelb: Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$; blaue durchgezogene Linie: die Funktion $f(T) = 410 \cdot \tanh\left(\frac{\omega_f}{2T}\right)$ ns; rot schattierter Bereich: Sigmaintervall mit $g(t) = 410\text{ns} - aT^2$ und $a = 4.96\mu\text{s} \pm 0.71\mu\text{s}$. Gemeinsame Parameter: $\omega_f = 7.735\text{Ghz}$, $v = 23\text{MHz}$, $\Gamma_Q = 110\text{ns}$ und $\Gamma_F = 410\text{ns}$.

6. Quanten-Zeno-Effekt

Der Quanten-Zeno-Effekt ist ein rein quantenmechanischer Effekt der besagt, dass ein quantenmechanisches System, das ständig beobachtet wird, seinen Ausgangszustand nie verlässt. Der Ausgangszustand wird sogar beliebig lange beibehalten, sofern das Zeitintervall der Messungen hinreichend klein wird [43]. Tatsächlich wurde dieser Effekt auch schon experimentell in Hyperfeinübergängen des ${}^9\text{Be}^+$ nachgewiesen [44].

Eine weniger aufwendige Demonstration des Effektes lässt sich auch mit polarisiertem Licht realisieren. Dabei lässt man linear polarisiertes Licht durch ein Medium (z.B. Zuckerwasser) laufen welches seine Polarisations Ebene um einen bestimmten Wert je durchlaufener Strecke dreht. Wählt man die Strecke so, dass sie die Polarisations Ebene des Lichts um insgesamt 90° dreht und setzt dahinter einen Analysator welche nur Licht ursprünglicher Polarisations Ebene durchlässt, so kommt hinter dem Analysator kein Licht mehr an. Setzen wir aber nun n Analysatoren gleicher Polarisationsrichtung in den Strahlengang so kann man zeigen, dass im Grenzfall $n \rightarrow \infty$, tatsächlich Licht hinter dem letzten Analysator ankommt. Dabei wird bei jedem Durchgang des Lichts durch einen Analysator seine Polarisations Ebene auf die des Analysators projiziert. Im Teilchenbild würden wir jeden Durchgang als Ja-Nein-Entscheidung über das Passieren des Analysators interpretieren, der Analysator spielt hierbei die Rolle des Beobachters [45].

In unserem Modell des n -Level-Qubits gekoppelt an einen Fluktuator können wir den selben Effekt für die Übergangsrate eines bestimmten Zustandes in einen anderen Zustand sehen. Dabei tritt das Bad in die Rolle des Beobachters. Wie wir an einem Beispiel sehen werden, können wir den Effekt jedoch nicht in Sekularer Näherung sehen. Insbesondere tritt der Effekt umso stärker hervor umso mehr die Näherungsbedingung für die Sekulare Näherung: $\Delta E_S \gg T_1^{-1}, T_2^{-1}$ (2.29) verletzt wird.

6.1. Quanten-Zeno-Effekt am Beispiel eines Spin 1/2 im Magnetfeld

Betrachten wir einen Spin $\frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld B in z -Richtung dessen Ausgangszustand soll der in x -Richtung vollständig polarisierte Zustand $|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle_x$ sein.

Im Folgenden benötigen wir die Zeitentwicklung des Zustandes $|+\rangle_x$.

Der Hamiltonoperator setzt sich aus der Zeemanenergie der Aufspaltung der entarteten Energiezustände zusammen,

$$H = -\frac{1}{2}\gamma B\sigma_z. \quad (6.1)$$

Der Ausgangszustand des System schreibt sich in der Basis der Eigenzustände des σ_z Operators wie folgt,

$$\sigma_x |+\rangle_x = |+\rangle_x \quad (6.2a)$$

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_z + |-\rangle_z]. \quad (6.2b)$$

6. Quanten-Zeno-Effekt

Wir erhalten damit für den Zustand des System zu einem späteren Zeitpunkt,

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-\frac{1}{2}\gamma B t} |+\rangle + e^{\frac{1}{2}\gamma B t} |-\rangle]. \quad (6.3)$$

Führen wir zu einem Zeitpunkt τ nach Einschalten des Magnetfeldes eine Messung in x-Richtung durch so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit den Zustand in seinem Ausgangszustand vorzufinden

$$W_1(\tau) = |\langle +|_x |\Psi(\tau)\rangle|^2 \quad (6.4a)$$

$$= \cos^2\left(\frac{1}{2}\gamma B \tau\right) \quad (6.4b)$$

$$= \frac{1}{2} [1 + \cos(\Omega\tau)], \quad \Omega := \gamma B. \quad (6.4c)$$

Wir erhalten für die Wahrscheinlichkeit den Zustand nach n-Messungen im Zeitabstand τ immernoch im Ausgangszustand $|+\rangle_x$ vorzufinden,

$$W_n(n\tau) = \left[\frac{1}{2} [1 + \cos(\Omega\tau)] \right]^n. \quad (6.5)$$

Für Messzeitintervalle τ die sehr klein gegenüber der inversen Frequenz Ω^{-1} sind, können wir den Ausdruck (6.5) noch wie folgt entwickeln

$$W_n(n\tau) \xrightarrow{\Omega\tau \ll 1} 1 - n \frac{(\Omega\tau)^2}{4}. \quad (6.6)$$

Für eine gegebene Zeit $T = n\tau$ erhalten wir somit die Wahrscheinlichkeit,

$$W_n(T) = 1 - \frac{\Omega^2 \tau T}{4}, \quad \Omega\tau \ll 1. \quad (6.7)$$

Wir erkennen an diesem Ausdruck, dass die Wahrscheinlichkeit auch für große T beliebig nahe bei 1 liegt, sofern die Messzeitintervallgröße τ hinreichend klein ist. Dies ist der Quantenmechanische-Zeno-Effekt.

6.2. Quanten-Zeno-Effekt für ein dissipatives 2-Level-System

In [46] wurde der Fall eines 2-Level-Systems transversal gekoppelt an ein Bad diskutiert. Der betrachtete Hamiltonoperator hierbei ist der uns aus (1.5) schon Bekannte für den "Einstellungswinkel" $\eta = \frac{\pi}{2}$, was einer rein transversalen Ankopplung an das Bad entspricht. Wir geben hier die wichtigsten Resultate wieder, da sie wesentlich für das Verständnis des Quanten-Zeno-Effektes in unserem System sein werden. Wir betrachten also folgenden Hamiltonoperator,

$$H = H_S + H_{SR} + H_R, \quad (6.8a)$$

$$H = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_x X + H_R. \quad (6.8b)$$

Der entsprechende Redfield Tensor schreibt sich dabei wie folgt,

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{11} \\ \dot{\rho}_{22} \\ \dot{\rho}_{12} \\ \dot{\rho}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{21} & W_{12} & 0 & 0 \\ W_{21} & -W_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_{21} - \gamma_{12} & \gamma_{12}^* \\ 0 & 0 & \gamma_{12} & -i\omega_{21} - \gamma_{12}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ \rho_{12} \\ \rho_{21} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Dabei verschwinden die Einträge der Blockmatrizen, welche die Diagonalelemente mit den Nebendiagonalelementen der Dichtematrix verknüpfen, aufgrund verschwindender Übergangsmatrixelemente. Betrachtet man den Grenzfall $\omega_{21} \ll \text{Re}[\gamma_{12}] = T_2^{-1}$ so ist die Anwendung der Sekularen Näherung nicht mehr gültig. Man erhält in diesem Fall eine Kopplung der Nebendiagonalelemente untereinander.

Diese Nichtdiagonalelemente haben zur Konsequenz, dass eine Eigenmode existiert welche sehr langsam in der Zeit zerfällt. Man erhält aus dem charakteristisches Polynom der unteren Blockmatrix folgende Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\text{Re}[\gamma_{12}] \pm \sqrt{\tilde{\omega}_{21}^2 - |\gamma_{12}|^2} \quad (6.10)$$

mit $\tilde{\omega}_{21} := \omega_{21} - \text{Im}[\gamma_{12}]$.

Für den Fall eines reellen γ_{12} erhält man in den Limites

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\omega_{21}^2}{2\gamma_{12}} & \lambda_2 = -2\gamma_{12} & \omega_{21} \ll \gamma_{12} \\ \lambda_1 = -\gamma_{12} + i\omega_{21} & \lambda_2 = -\gamma_{12} - i\omega_{21} & \omega_{21} \gg \gamma_{12} \end{cases} \quad (6.11)$$

wir erhalten also für $\omega_{21} \ll \gamma_{12}$ einen im Vergleich zum Anderen sehr kleinen Eigenwert, der sogar mit zunehmender Relaxationsrate des Bades kleiner wird. Offensichtlich konvergieren die Eigenwerte im entgegengesetzten Limes zu den Eigenwerten welche wir auch in Sekularer Näherung bei vollständiger Entkopplung der Nichtdiagonalelemente bekommen würden.

In gewissen Hinsicht können wir hier also von dem Bad als Beobachter sprechen. Denn auch hier wird der Zerfall umso stärker gehemmt, desto stärker die Relaxationsrate induziert durch das Bad ist.

6.3. Quanten-Zeno-Effekt im n-Level-Qubit-Fluktuator System für die drei energetisch niedrigsten Zustände

Wie wir im vorangegangenen Abschnitt 6.2 gesehen haben trat der Effekt am stärksten hervor, falls die Zustände fast entartet sind. Wir erwarten deshalb, dass wir auch in unserem System bei nahezu entarteten Zuständen den Quanten-Zeno-Effekt sehen können.

Wie wir im Folgenden noch sehen werden ist es außerdem notwendig, dass nur eine der beiden transversalen Kopplungen an die Bäder mitnehmen. Wir betrachten die drei energetisch niedrigsten Energiezustände des n-Level-Qubit-Fluktuator Systems. Da wir zudem verschwindende Temperaturen voraussetzen: $T = 0$, können wir uns auf das 2-Level-Qubit-Fluktuator System beschränken.

Wir betrachten also folgenden Gesamthamiltonoperator,

$$H = H_S + H_{SR}, \quad (6.12a)$$

$$H_S = 0 |0\rangle \langle 0| + \omega_{01} |1\rangle \langle 1| - \frac{1}{2}\omega_f \tau_z + \frac{1}{2}\omega_f \mathbf{1} + \frac{1}{2}v \cdot \hat{p} \cdot \tau_x, \quad (6.12b)$$

$$H_{SR} = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta_{1,t}\hat{p}X_{1,t}, \\ \frac{1}{2}\beta_{2,t}\tau_x X_{2,t}. \end{cases} \quad (6.12c)$$

Wie bereits erwähnt sollte der Effekt umso stärker sein desto größer die Entartung der Zustände ist. Wir wählen die Verstimmung deswegen zu Null: $\delta\omega = 0$. Zudem betrachten wir den Grenzfall $\frac{\Gamma_{Q,F}}{v} \gg 1$.

6. Quanten-Zeno-Effekt

Die entsprechenden Energiediagramme des 2-Level-Qubit-Fluktuator Systems zeigt Abbildung 6.1.

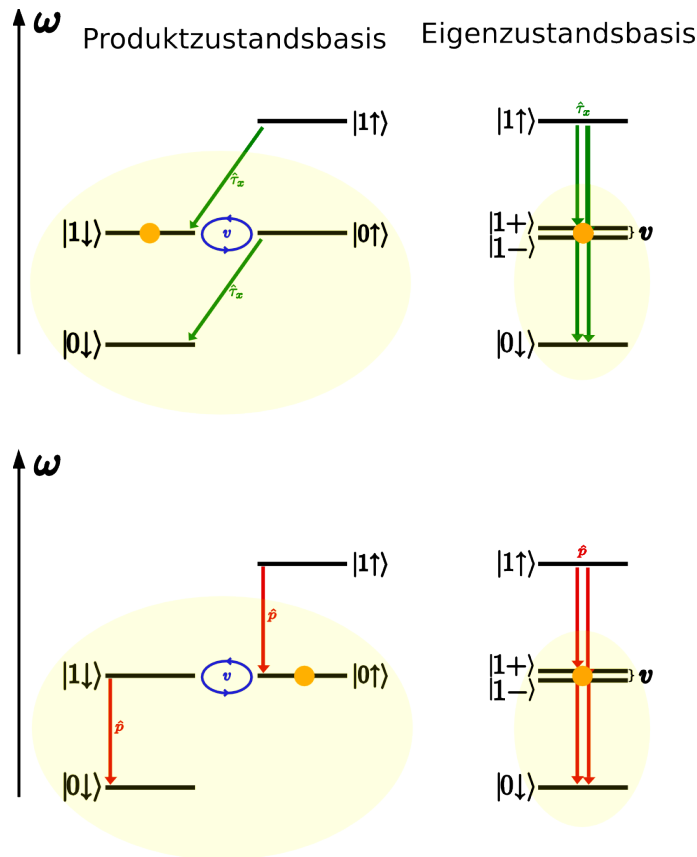


Abbildung 6.1.: Levelstrukturen des Fluktuator-2-Level-Qubit Systems für $\delta\omega = 0$ und $T = 0$. oben: Levelstrukturen mit eingezeichneten Übergängen nur mit Ankopplung des Fluktuators an das Bad, und Anfangszustand $|1, \downarrow\rangle$ orangefarbener Punkt; unten: Levelstrukturen mit eingezeichneten Übergängen nur mit Ankopplung des 2-Level-Qubits an das Bad, und Anfangszustand $|0, \uparrow\rangle$ orangefarbener Punkt. links: Darstellung in der Produktzustandsbasis; rechts: in der Eigenbasis.

Wir sehen in dieser Abbildung die Energiediagramme des 2-Level-Qubit-Fluktuator Systems für die beiden möglichen Realisierungen den Quanten-Zeno-Effekt beobachten zu können.

Wir sehen oben das Energiediagramm bei der nur der Fluktuator eine Ankopplung an das Bad besitzt, respektive unten bei der nur das 2-Level-Qubit eine Ankopplung aufweist. Der Anfangszustand wird so gewählt, dass die Relaxation des Zustandes nur über den energetisch ähnlichen Zwischenzustand in den Grundzustand $|0, \downarrow\rangle$ möglich ist. Dieser wird jeweils vom Bad "beobachtet" und hindert für sehr große Relaxationsraten $\Gamma_{Q,F}$ gegenüber v , effektiv den Zerfall des Anfangszustandes.

Im Folgenden wollen wir diese doch recht physikalische Intuition auch mathematisch untermauern.

6.3. Quanten-Zeno-Effekt im n -Level-Qubit-Fluktuator System für die drei energetisch niedrigsten Zustände

Wir suchen nach sehr kleinen Eigenwerten der Liouville Matrix. Die Liouville Matrix ist für das 2-Level-Qubit-Fluktuator System eine 16×16 große Matrix. Wie wir in Abschnitt 6.2 gesehen haben, dürfen wir keine Sekulare Näherung verwenden.

Der große Energieunterschied zwischen dem Grundzustand $|0, \downarrow\rangle$, respektive dem energetisch höchsten Zustand $|1, \uparrow\rangle$, und den entarteten Zuständen $|1, \downarrow\rangle$, $|0, \uparrow\rangle$, ermöglicht jedoch eine Diagonalisierung von Blockmatrizen ähnlicher Energie im Sinne der Bohrfrequenzen: $\omega_{m'm} \simeq \omega_{n'n}$ (2.26).

Ein Blick auf die Abbildung 6.1 lässt folgende Blockmatrizen in Betracht ziehen,

$$U_1^{4 \times 4} := \{\mathcal{L}_{12,12}, \mathcal{L}_{13,13}, \mathcal{L}_{24,24}, \mathcal{L}_{34,34}\}, \quad (6.13a)$$

$$U_2^{4 \times 4} := \{\mathcal{L}_{21,21}, \mathcal{L}_{31,31}, \mathcal{L}_{42,42}, \mathcal{L}_{43,43}\}, \quad (6.13b)$$

$$U_3^{2 \times 2} := \{\mathcal{L}_{23,23}, \mathcal{L}_{32,32}\}. \quad (6.13c)$$

Dabei besitzen die beiden Diagonalelemente der 2×2 großen Blockmatrix U_3 keine Nebendiagonalelemente. Der Grund ist die rein transversale Kopplung (6.12c), welche keine Übergangsmatrixelemente zwischen den hybridisierten Zuständen besitzt.

Jedoch besteht, im Gegensatz zu den anderen Blockmatrizen U_1, U_2 , eine Kopplung zu der Mastergleichung.

Wir erweitern die Blockmatrix U_3 zu U_3' demnach wie folgt,

$$U_1^{4 \times 4} := \{\mathcal{L}_{12,12}, \mathcal{L}_{13,13}, \mathcal{L}_{24,24}, \mathcal{L}_{34,34}\}, \quad (6.14a)$$

$$U_2^{4 \times 4} := \{\mathcal{L}_{21,21}, \mathcal{L}_{31,31}, \mathcal{L}_{42,42}, \mathcal{L}_{43,43}\}, \quad (6.14b)$$

$$U_3^{6 \times 6'} := \{\mathcal{L}_{11,11}, \mathcal{L}_{22,22}, \mathcal{L}_{33,33}, \mathcal{L}_{44,44}, \mathcal{L}_{23,23}, \mathcal{L}_{32,32}\}. \quad (6.14c)$$

Wir fassen dabei die Einträge der Diagonalelemente in den Mastergleichungen mit den Bohrfrequenzen $\omega_{ii} = 0$ auf. Da die Bohrfrequenzen mit $\omega_{23} = v$, $\omega_{32} = -v$ sehr klein sind sollte diese Kopplung auch effektiv sein.

Wir berechnen im Folgenden die Eigenwerte der Blockmatrizen (6.14). Wir führen diese Rechnung für eine Kopplung des Fluktuators an das Bad durch.

Wir wählen also die folgende Kopplung,

$$H_{SR} = \frac{1}{2} \beta_{2,t} \tau_x X_{2,t}. \quad (6.15)$$

Die Blockmatrizen schreiben sich für diese Kopplung wie folgt,

$$U_1^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\Gamma_F - i(\omega_f - \frac{v}{2}) & -\frac{1}{4}\Gamma_F & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\Gamma_F & -\frac{3}{4}\Gamma_F - i(\omega_f + \frac{v}{2}) & 0 & 0 \\ \frac{i}{2}\Gamma_F & \frac{i}{2}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F - i(\omega_f + \frac{v}{2}) & -\frac{1}{4}\Gamma_F \\ -\frac{i}{2}\Gamma_F & -\frac{i}{2}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F - i(\omega_f - \frac{v}{2}) \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

$$U_2 = U_1^*, \quad (6.17)$$

6. Quanten-Zeno-Effekt

$$U_3^{6 \times 6'} = \begin{pmatrix} -\Gamma_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\Gamma_F & -\frac{1}{2}\Gamma_F & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F \\ \frac{1}{2}\Gamma_F & 0 & -\frac{1}{2}\Gamma_F & 0 & -\frac{1}{4}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F \\ 0 & \frac{1}{2}\Gamma_F & \frac{1}{2}\Gamma_F & 0 & \frac{1}{2}\Gamma_F & \frac{1}{2}\Gamma_F \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F & 0 & -\frac{1}{2}\Gamma_F - iv & 0 \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F & -\frac{1}{4}\Gamma_F & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Gamma_F + iv \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Dabei haben wir alle dissipativen Elemente als Funktion der Fluktuatorrate Γ_F mit der Näherung $C_{X_{2,t}X_{2,t}}^{harm}(\omega_f) \simeq C_{X_{2,t}X_{2,t}}^{harm}(\omega_{12}) \simeq C_{X_{2,t}X_{2,t}}^{harm}(\omega_{13}) \simeq C_{X_{2,t}X_{2,t}}^{harm}(\omega_{24}) \simeq C_{X_{2,t}X_{2,t}}^{harm}(\omega_{34})$ ausgedrückt. Das ist eine sehr gute Näherung wegen $\alpha_{X_{2,t}} \ll 1$.

Alle Bohrfrequenzen nehmen wir hingegen exakt. Zum einen da sie nicht durch den Faktor $\alpha_{X_{2,t}}$ unterdrückt sind und zum anderen nötig sind um wichtige Terme in der Taylorreihenentwicklung der Eigenwerte nicht wegzunähern.

Die Eigenwerte EW berechnen wir zu,

$$EW_{U_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\Gamma_F - i \cdot \omega_f - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma_F^2}{4} - v^2} \\ -\frac{3}{4}\Gamma_F - i \cdot \omega_f + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma_F^2}{4} - v^2} \\ -\frac{1}{4}\Gamma_F - i \cdot \omega_f + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma_F^2}{4} - v^2} \\ -\frac{1}{4}\Gamma_F - i \cdot \omega_f - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma_F^2}{4} - v^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{v \ll \Gamma_F} \begin{pmatrix} -\Gamma_F - i \cdot \omega_f \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F - i \cdot \omega_f \\ -\frac{v^2}{2\Gamma_F} - i \cdot \omega_f + O\left(\frac{v^4}{\Gamma_F^3}\right) \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F - i \cdot \omega_f \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

$$EW_{U_2} = EW_{U_1}^*, \quad (6.20)$$

$$EW_{U_3'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Gamma_F \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F - \sqrt{\frac{\Gamma_F^2}{4} - v^2} \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F + \sqrt{\frac{\Gamma_F^2}{4} - v^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{v \ll \Gamma_F} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Gamma_F \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F \\ -\frac{1}{2}\Gamma_F \\ -\Gamma_F \\ -\frac{v^2}{\Gamma_F} + O\left(\frac{v^4}{\Gamma_F^3}\right) \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Wir erhalten also in jeder Blockmatrix einen gegenüber den Anderen sehr kleinen Eigenwert,

$$\Gamma_I := -\frac{v^2}{\Gamma_F}, \quad (6.22a)$$

$$\Gamma_{II} := -\frac{v^2}{2\Gamma_F} - i \cdot \omega_f, \quad (6.22b)$$

$$\Gamma_{III} := \Gamma_{II}^*, \quad (6.22c)$$

mit der typischen Eigenschaft umso langsamer zu sein umso stärker die Relaxationsrate Γ_F induziert durch das Bad ist - Quanten-Zeno-Effekt.

7. Schlusswort

Gegenstand dieser Diplomarbeit war die Untersuchung der Relaxationseigenschaften eines hochfrequenten Fluktuators unter der Wechselwirkung mit einem Phasenqubit.

Der Ausgangspunkt zur Beschreibung des Problems stellte der in Kapitel 2 eingeführte Bloch Redfield Formalismus dar, ein Formalismus auf der Grundlage der fundamentalen Schrödingergleichung zur Beschreibung offener Systeme mit schwachem, kurzkorreliertem Rauschen.

In Kapitel 3 hatten wir dann die das System charakterisierenden Hamiltonians sowie deren Ankopplung an die Bäder diskutiert. Wir hatten einen effektiven Hamiltonian H_Q zur Beschreibung des Phasenqubits eingeführt, welcher für kleine Levelanzahlen in guter Übereinstimmung mit den Eigenenergien des Phasenqubithamiltonians ist. Als Kopplung zwischen Fluktuator und Phasenqubit hatten wir eine rein transversale Wechselwirkung angenommen. Eine endliche transversale Kopplung ist in experimenteller Hinsicht bereits mehrfach gut bestätigt, so beschreibt eine solche Kopplung beispielsweise die Aufspaltung der Anregungsenergien an den Resonanzstellen zwischen Qubit und Fluktuator.

Ausgehend vom Spezialfall eines Fluktuators unter der Wechselwirkung mit einem 3-Level-Qubit, hatten wir dann das Relaxationszeitverhalten des Fluktuators in Abhängigkeit von der Verstimmung $\delta\omega$ für das allgemeine Mehr-Niveau-Phasenqubit untersucht. Das Zustandekommen der Resonanzen in der Relaxationszeitkurve ließ sich dabei auf resonante Übergänge des Fluktuators mit der Eigenfrequenz ω_f und höherer Energieübergänge im Phasenqubit $\omega_s - \omega_{s-1}$ zurückführen. Aufgrund der Anharmonizität des Potentials treten diese dann bei negativen Verstimmungen auf.

Ein Vergleich der numerischen Berechnungen der Relaxationsrate des Fluktuators unter dem Einfluss eines Phasenqubits mit den Experimenten aus Ref.: [32] zeigte, dass qualitativ eine Vergrößerung der Resonanzbreite durch eine Überlagerung einzelner Resonanzen zustande kommen könnte. Für die zugrundeliegenden experimentellen Parameter war jedoch noch deutlich der Unterschied einzelner Resonanzen zu sehen, um das Bild einer großen Resonanz entstehen zu lassen.

Eine Analyse des Temperaturverhaltens der Relaxationszeitkurven des Fluktuators ergab, dass wir unter Einbeziehung höherer Energielevels $n \geq 3$ des Phasenqubits eine Abweichung der Relaxationszeit im Vergleich zu der wohlbekanntem Beziehung $T_1^{-1} \propto \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right)$ des Zwei-Niveau-Systems bekommen. Da im Experiment keine Abnahme der Relaxationszeit bei der Verstimmung $\delta\omega = -0.5\text{GHz}$ für $T = 35\text{mK}$ festzustellen ist, erachten wir eine Anregung höherer Energielevels des Phasenqubits mit zunehmender Temperatur T für einen möglichen Mechanismus für das abweichende Verhalten der Relaxationsrate als Funktion der Temperatur.

Die Arbeit schloss mit der Betrachtung des Quanten-Zeno-Effektes für die drei energetisch

7. *Schlusswort*

niedrigsten Zustände in unserem System ab. Wir konnten zeigen, dass für den Resonanzfall die Relaxationsrate eines der beiden energetisch höheren Zustände mit zunehmender Übergangsrate des Bades sogar gehemmt wird. Die Relaxation in den Grundzustand war dabei nur über den energetisch gleichwertigen Zustand möglich, welcher ständig durch das Bad "beobachtet" wird.

A. Anhang

Für die folgenden Darstellungen von Fermis Goldener Regel, den Eigenschaften der Gleichgewichtskorrelationsfunktionen, der Linearen Resonanztheorie, sowie dem Fluktuations-Dissipations-Theorem gibt es sicherlich sehr viele und gute Darstellungen, wir haben die folgenden Literaturen verwendet:

- Statistical Physics, L.E.Reichl [47]
- Electronic noise and fluctuations in solids, Sh.Kogan [48]
- Quantenmechanik II, F.Schwabl [49]

A.1. Fermis Goldene Regel

Wie in Kapitel 2 bereits erwähnt wurde erhalten wir im Bloch Redfield Formalismus genau die gleichen Übergangsraten wie man sie auch mittels der Goldenen Regel berechnen kann. Das wollen wir hier zeigen.

Dazu betrachten wir noch einmal den uns schon bekannten Hamiltonoperator

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \quad (\text{A.1})$$

- H_S : Hamiltonoperator des Systems
- H_R : Hamiltonoperator der Umgebung
- H_{SR} : Wechselwirkungsoperator zwischen System und Umgebung

Beschränken wir uns, wie schon im Bloch Redfield Formalismus, auf eine lineare Kopplung zwischen System und Umgebung, und fassen den Wechselwirkungsterm H_{SR} als kleine Störung auf so können wir (A.1) schreiben als

$$H = H_0 + s \cdot X \quad (\text{A.2})$$

Wir führen die Rechnungen zunächst im Wechselwirkungsbild durch, die Transformationsvorschriften für beliebige Zustände und Operatoren lauten

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle := U_0(t)^\dagger |\psi(t)\rangle = \underbrace{U_0(t)^\dagger U(t)}_{:=W(t)} |\psi(0)\rangle \quad (\text{A.3a})$$

$$\tilde{A}(t) := U_0(t)^\dagger A(t) U_0(t) \quad (\text{A.3b})$$

mit

$$U_0(t) = e^{-iH_0 t} \quad (\text{A.4a})$$

$$U(t) = e^{-iH t} \quad (\text{A.4b})$$

A. Anhang

Wegen der Nichtvertauschbarkeit von H_0 und $H_{RS} = s \cdot X$ verwenden wir die allgemeine Bestimmungsgleichung für $W(t)$

$$i\dot{W}(t) = \tilde{H}_{SR}(t)W(t) \quad (\text{A.5a})$$

$$W(0) = \mathbf{1} \quad (\text{A.5b})$$

oder Integralform bis einschließlich 2ter Ordnung

$$W(t) = W(0) - i \int_0^t dt' \tilde{H}_{SR}(t') - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \tilde{H}_{SR}(t') \tilde{H}_{SR}(t'') + O(H_{SR}^3) \quad (\text{A.6a})$$

$$W(0) = \mathbf{1} \quad (\text{A.6b})$$

Wir sind an den Übergangswahrscheinlichkeiten interessiert, um diese zu erhalten berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Eigenzustand von H_0 $|a\rangle = |a_S\rangle \otimes |a_R\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$ in einen Eigenzustand $|b\rangle = |b_S\rangle \otimes |b_R\rangle$ zum Zeitpunkt t gestreut wird.

$$P_{a \rightarrow b}(t) = |\langle b | U(t) | a \rangle|^2 \stackrel{(\text{A.3a})}{=} |\langle b | W(t) | a \rangle|^2 \quad (\text{A.7})$$

Mit (A.6) erhalten wir für das Matrixelement

$$\langle b | W(t) | a \rangle = \langle b | a \rangle - i \int_0^t dt' \langle b | \tilde{H}_{SR}(t') | a \rangle - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle b | \tilde{H}_{SR}(t') \tilde{H}_{SR}(t'') | a \rangle \quad (\text{A.8})$$

mit

$$\langle b | \tilde{H}_{SR}(t') | a \rangle = \langle b | \tilde{s}(t') \tilde{X}(t') | a \rangle = e^{i\omega_{ba}t'} s_{ba} \langle b_R | \tilde{X}(t') | a_R \rangle \quad (\text{A.9a})$$

$$\omega_{ba} := E_b - E_a \quad (\text{A.9b})$$

$$s_{ba} := \langle b_S | s | a_S \rangle \quad (\text{A.9c})$$

Wir interessieren uns genauer gesagt für spezifische Übergänge in H_S : $|a_S\rangle \rightarrow |b_S\rangle$ Wir summieren deswegen über alle Badenzustände $|b_R\rangle$ und nehmen als Ausgangszustand für $|a_R\rangle$ eine thermische Verteilung an. Nehmen wir weiterhin an, dass die Wechselwirkung zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird so faktorisiert die Gesamtdichtematrix in Dichtematrix des Systems und Bads

$$R_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H_R}{T}} \quad Z = \text{Tr}_R [e^{-\frac{H_R}{T}}] \quad (\text{A.10a})$$

$$\chi(0) = \rho(0) R_0 \quad (\text{A.10b})$$

Wir berechnen damit die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $|a_S\rangle$ in $|b_S\rangle$ mit (A.7),

(A.8), (A.9a) in 1 Ordnung zu

$$P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) = \sum_{b_R} \sum_{a_R} \langle a_R | R_0 | a_R \rangle \left(-i \int_0^t dt' e^{i\omega_{ba}t'} s_{ba} \langle b_R | \tilde{X}(t') | a_R \rangle \right) \cdot \left(-i \int_0^t dt'' e^{i\omega_{ba}t''} s_{ba} \langle b_R | \tilde{X}(t'') | a_R \rangle \right)^* \quad (\text{A.11})$$

$$P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) = \sum_{b_R} \sum_{a_R} \langle a_R | R_0 | a_R \rangle |s_{ab}|^2 \cdot \left(\int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\omega_{ba}(t'-t'')} \langle a_R | \tilde{X}(t'') | b_R \rangle \langle b_R | \tilde{X}(t') | a_R \rangle \right) \quad (\text{A.12})$$

$$P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) = \sum_{a_R} \langle a_R | R_0 | a_R \rangle |s_{ab}|^2 \left(\int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\omega_{ba}(t'-t'')} \langle a_R | \tilde{X}(t'') \tilde{X}(t') | a_R \rangle \right) \quad (\text{A.13})$$

$$P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) = |s_{ab}|^2 \left(\int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\omega_{ba}(t'-t'')} \langle \tilde{X}(t'') \tilde{X}(t') \rangle_{R_0} \right) \quad (\text{A.14})$$

dabei haben wir im letzten Schritt den Mittelwert des Badkorrelators im thermischen Gleichgewicht definiert durch

$$\langle \tilde{X}(t'') \tilde{X}(t') \rangle_{R_0} := \sum_{a_R} \langle a_R | R_0 | a_R \rangle \langle a_R | \tilde{X}(t'') \tilde{X}(t') | a_R \rangle \quad (\text{A.15})$$

Unter Verwendung der Fouriertransformation des Badkorrelators

$$C_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \tilde{X}(\tau) \tilde{X}(0) \rangle_{R_0} \quad (\text{A.16})$$

und Ausnützung der Eigenschaft, dass der thermische Gleichgewichtskorrelator nur von der relativen Zeitdifferenz abhängt können wir (A.14) schreiben als

$$P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) = |s_{ab}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} C_{XX}(\omega) \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_{ab}}{2} t\right)}{\frac{\omega - \omega_{ab}}{2}} \right)^2 \quad (\text{A.17})$$

Ist $C_{XX}(\omega)$ hinreichend glatt in einer Umgebung um ω_{ab} , dann kann der oszillierende Integrand in (A.17) durch eine δ Funktion um $\omega = \omega_{ab}$ angenähert werden wir erhalten damit

$$P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) = |s_{ab}|^2 C_{XX}(\omega_{ab}) t \quad (\text{A.18})$$

Wir können damit die Übergangsrate definieren durch $P_{a_S \rightarrow b_S}^{(1)}(t) := W_{ab} \cdot t$ und erhalten aus (A.18)

$$W_{ab} = |s_{ab}|^2 C_{XX}(\omega_{ab}) \quad (\text{A.19})$$

A. Anhang

und erhalten damit das gleiche Ergebnis für die Übergangsraten wie wir sie in Bloch-Redfield-Näherung aus Kapitel 2 schon erhalten hatten.

A.2. Wichtige Eigenschaften von Gleichgewichtskorrelationsfunktionen

In diesem Abschnitt möchten wir die wesentlichen Eigenschaften von Gleichgewichtskorrelationsfunktionen herleiten. Diese sind gleichzeitig von hohem praktischen Nutzen, insbesondere erweist sich das Fluktuations-Dissipations-Theorem (FDT) sowie die Kramers-Kronig-Relationen als sehr nützlich für die Bestimmung der gesamten Badkorrelationsfunktionen, die wie wir gesehen haben in Bloch Redfield Näherung ausreichend Information über das Bad liefern, siehe dazu wieder Kapitel 2. Für die Folgenden

A.2.1. Definitionen

Eine Korrelationsfunktion C von zwei Observablen A und B ist definiert durch:

$$C_{AB}(t, t') := \langle A(t)B(t') \rangle \quad (\text{A.20a})$$

$$\langle \dots \rangle := \text{Tr}[\rho \dots] \quad (\text{A.20b})$$

Dabei sind $A(t)$ und $B(t')$ die entsprechenden Operatoren im Heisenbergbild, ρ die Dichtematrix, wir setzen einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator H_0 für das Gleichgewichtssystem voraus.

$$A(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (\text{A.21a})$$

$$B(t') = e^{iH_0(t'-t_0)} B e^{-iH_0(t'-t_0)} \quad (\text{A.21b})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $t_0 = 0$. Da wir uns für Gleichgewichtskorrelationsfunktionen, im weiteren Vorgehen interessieren setzen wir zusätzlich voraus

$$[H_0, \rho] = 0 \quad (\text{A.22a})$$

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H_0}{T}} \quad Z = \text{Tr}[e^{-\frac{H_0}{T}}] \quad (\text{A.22b})$$

dabei können wir uns o.B.d.A. auf ein kanonisches Ensemble beschränken.

A.2.2. Wichtige Eigenschaften

Fluktuationen und statistische Interpretation

Es genügt wie wir im folgenden sehen, dass wir uns auf die Korrelationen der Fluktuationen um einen zeitunabhängigen Mittelwert konzentrieren, wir können nämlich für unsere Observablen schreiben:

$$A(t) = \langle A \rangle + \delta A(t) \quad \langle \delta A(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.23a})$$

$$B(t) = \langle B \rangle + \delta B(t) \quad \langle \delta B(t') \rangle = 0 \quad (\text{A.23b})$$

Setzen wir diese Darstellung in (A.20a) ein so erhalten

$$\begin{aligned} C_{AB}(t, t') &= \langle A(t)B(t') \rangle = \langle (\langle A \rangle + \delta A(t)) \cdot (\langle B \rangle + \delta B(t')) \rangle \\ &= \langle \delta A(t)\delta B(t') \rangle + \langle \delta A(t)\langle B \rangle \rangle + \langle \delta B(t')\langle A \rangle \rangle + \langle \langle A \rangle \langle B \rangle \rangle \\ &= \langle \delta A(t)\delta B(t') \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A. Anhang

dabei haben wir in der letzten Zeile ausgenutzt, dass die Fluktationen im Mittel verschwinden. Wir stellen fest, dass die Korrelationsfunktionen der Observablen $A(t)$ und $B(t')$ sich von denen der Fluktationen $\delta A(t)$ und $\delta B(t')$ nur um eine im folgenden vernachlässigbare Konstante $\langle A \rangle \langle B \rangle$ unterscheiden.

Schauen wir uns (A.24) etwas genauer an so sehen wir, dass für $t = t'$ und $A = B$ die Korrelationsfunktion $C(t, t)$ nichts anderes als die Varianz der statistischen Größe A darstellt: $C_{AA}(t, t) = \langle \delta A(t)^2 \rangle$.

Für physikalisch sinnvolle Systeme zerfallen die Korrelationsfunktionen, falls $|t - t'| \rightarrow \infty$. Sei beispielsweise zum Zeitpunkt $t = t_1$ die Fluktuation der Observable A durch $\delta A(t_1)$ gegeben, falls nun eine Korrelation zwischen den Fluktuationen besteht, wird die Fluktuation der Observable B zum Zeitpunkt $t' = t_2$ mit $t_2 = t_1 + \epsilon$, $\frac{\epsilon}{t_1} \ll 1$: $\delta B(t_2)$ nicht sehr viel von der Fluktuation $\delta A(t_1)$ abweichen, und sicherlich mit hoher Wahrscheinlichkeit das selbe Vorzeichen besitzen, was uns im Ensemblemittel einen endlichen Wert für C_{AB} liefert. Für genügend lange Zeitdifferenzen bekommen jedoch auch Fluktuationen anderen Vorzeichens an statistischem Gewicht bis schließlich beide Vorzeichen mit gleichem Anteil vorkommen, was letztlich $C_{AB}(t_1 - t_2) \xrightarrow{|t_1 - t_2| \rightarrow \infty} 0$ erzwingt, man spricht auch vom Zerfall der Korrelationen.

Zeittranslationsinvarianz

Wir können für Gleichgewichtskorrelationen sehr einfach zeigen, dass sie nur von der relativen Zeitdifferenz $t_1 - t_2$ der beiden Observablen abhängen.

$$\begin{aligned}
 C_{AB}(t, t') &= \langle A(t)B(t') \rangle \\
 &= \text{Tr}[\rho e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t'} B e^{-iH_0 t'}] \\
 &\stackrel{\text{(A.22a)}}{=} \text{Tr}[\rho e^{iH_0(t-t')} A e^{-iH_0(t-t')} B] \\
 &= C_{AB}(t - t', 0)
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Wichtige Relationen

Wegen der der i.A. zu beachtenden Nichtvertauschbarkeit von Operatoren in der Quantenmechanik, erweisen sich zwei weitere Definitionen als nützlich

$$C_{AB}^>(t) := \langle A(t)B(0) \rangle \tag{A.26a}$$

$$C_{AB}^<(t) := \langle B(0)A(t) \rangle \tag{A.26b}$$

Dabei gibt \gtrless die Reihenfolge der Operatoren A und B an, das Subscript $_{AB}$ hingegen die zeitliche Reihenfolge.

Die Fouriertransformation ist gegeben durch:

$$C_{AB}^{\gtrless}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} C_{AB}^{\gtrless}(t) \tag{A.27}$$

Als nächstes schieben wir die Vollständigkeitsrelation $\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}$ der Eigenzustände von H_0

$$H_0 |n\rangle = \omega_n |n\rangle \tag{A.28}$$

A.2. Wichtige Eigenschaften von Gleichgewichtskorrelationsfunktionen

ein, und erhalten die Spektraldarstellung von (A.27)

$$C_{AB}^>(\omega) = \frac{2\pi}{Z} \sum_{n,m} e^{-\frac{\omega_n}{T}} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle \delta(\omega - \omega_n + \omega_m) \quad (\text{A.29a})$$

$$C_{AB}^<(\omega) = \frac{2\pi}{Z} \sum_{n,m} e^{-\frac{\omega_n}{T}} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle \delta(\omega - \omega_m + \omega_n) \quad (\text{A.29b})$$

dabei haben wir folgende Beziehung benützt: $2\pi\delta(\omega - a) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} e^{iat}$. Anhand dieser Spektraldarstellung können wir 2 wichtige Relationen ableiten

$$C_{AB}^>(-\omega) = C_{BA}^<(\omega) \quad (\text{A.30a})$$

$$C_{AB}^<(\omega) = C_{AB}^>(\omega) e^{-\frac{\omega}{T}} \quad (\text{A.30b})$$

Die erste Beziehung (A.30a) ergibt sich durch Ausnützen der Eigenschaft $\delta(\omega - a) = \delta(a - \omega)$. Die zweite (A.30b) erhält man indem man in (A.29b) n mit m vertauscht und die δ Funktion verwendet.

Mit Hilfe der beiden so gefundenen Relationen können wir eine weitere wichtige Relation zwischen Gleichgewichtskorrelationsfunktionen herleiten

$$C_{AA}^>(-\omega) = C_{AA}^>(\omega) e^{-\frac{\omega}{T}} \quad (\text{A.31})$$

Diese Relation besagt, dass Anregungen im Vergleich zu Abregungen in einem System, induziert durch ein Bad welches den effektiven Freiheitsgrad A besitzt (z.B.: kann A die Summe aus einzelnen Freiheitsgraden sein die an einen Freiheitsgrad des Systems ankoppelt zitieren), exponentiell gedämpft sind.

Die Beziehung (A.31) ist auch unter dem Begriff des "detaillierten Gleichgewichts" bekannt. Sie erzwingt in der allgemeinen Struktur der Pauli Mastergleichungen

$$\dot{p}_n = \sum_{n'} (W_{n'n} p_{n'} - W_{nn'} p_n) \quad (\text{A.32a})$$

$$W_{nn'} \propto C_{AA}^>(\omega_n - \omega_{n'}) \quad (\text{A.32b})$$

, dass die Besetzungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Eigenzustände des Systems p_n sich im thermischen Gleichgewicht auch aufgrund der Übergangswahrscheinlichkeiten $W_{nn'}$ nicht mehr ändern, d.h. stationär sind.

Definieren wir noch die symmetrisierte $S(\omega)$ und antisymmetrisierte Korrelationsfunktion $A(\omega)$ durch

$$S(\omega) := \frac{1}{2} (C_{AA}^>(\omega) + C_{AA}^>(-\omega)) \quad (\text{A.33a})$$

$$A(\omega) := \frac{1}{2} (C_{AA}^>(\omega) - C_{AA}^>(-\omega)) \quad (\text{A.33b})$$

verwenden wir Gleichung (A.31) so erhalten wir eine wichtige Beziehung zwischen der symmetrisierten und antisymmetrisierten Korrelationsfunktion:

$$S(\omega) = A(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \quad (\text{A.34})$$

Laplace-Transformation der Badkorrelationsfunktion

Wir leiten hier die eine Beziehung zwischen dem Realteil der Laplacetransformierten und der Fouriertransformierten der Badkorrelationsfunktion her,

$$\operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} dt'' e^{(-\sigma - i\omega_{cd})t''} C_{X_i X_j}(t'') \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' e^{-i\omega_{cd}t''} C_{X_i X_j}(t''), \quad \sigma \rightarrow 0_+. \quad (\text{A.35})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt'' e^{(-\sigma - i\omega_{cd})t''} C_{X_i X_j}(t'') &= \int_0^{\infty} dt'' e^{(-\sigma - i\omega_{cd})t''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} C_{X_i X_j}(\omega) e^{i\omega t''} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} C_{X_i X_j}(\omega) \frac{i}{\omega - \omega_{cd} + i\sigma} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2} C_{X_i X_j}(\omega) \delta(\omega - \omega_{cd}) + iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{C_{X_i X_j}(\omega)}{\omega - \omega_{cd}} \\ &= \frac{1}{2} C_{X_i X_j}(\omega = \omega_{cd}) + iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{C_{X_i X_j}(\omega)}{\omega - \omega_{cd}}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

dabei haben wir im letzten Schritt folgende Identität benützt,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha \mp i\beta} = P \left(\frac{1}{\alpha} \right) \pm i\pi\delta(\alpha), \quad (\text{A.37})$$

mit P dem Cauchschy Hauptwert.

A.2.3. Lineare Resonsetheorie

In der linearen Resonsetheorie ist man an der dynamischen Suszeptibilität interessiert, welche einen linearen Zusammenhang zwischen einer von außen angelegten hinreichend schwachen Kraft und der Response auf diese Abweichung herstellt. Hier wird eine kurze Ableitung der dynamischen Suszeptibilität gegeben, die für die weitere Diskussion von Interesse ist.

Wir nehmen ein System an welches sich bis zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im thermischen Gleichgewicht befunden hat. Für Zeiten $t_0 \geq 0$ greife eine äußere Kraft $F(t)$ am System an, welche an eine physikalische Größe S des System ankoppelt und eine Energieverschiebung verursacht beschrieben durch eine Störung $-F(t)S$ im Hamiltonoperator.

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & , t < 0 \\ H_0 - F(t)S & , t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

so könnte $F(t)$ zum Beispiel ein Magnetfeld \mathbf{B} sein welches an eine Magnetisierung \mathbf{M} ankoppelt.

Wir führen die Rechnungen im Wechselwirkungsbild durch, dies ermöglicht uns gezielt

A.2. Wichtige Eigenschaften von Gleichgewichtskorrelationsfunktionen

Näherungen in der Störung $-F(t)S$ anzusetzen.

Die Transformationsvorschriften seien hier noch einmal kurz angegeben,

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.39a})$$

$$\tilde{A}(t) := e^{iH_0 t} A(t) e^{-iH_0 t} \quad (\text{A.39b})$$

für beliebige Zustandsvektoren $|\psi(t)\rangle$ und Operatoren $A(t)$ im Schrödingerbild.

Damit erhalten wir die Liouville Gleichung im Wechselwirkungsbild:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = i[F(t)\tilde{S}(t), \tilde{\rho}(t)] \quad (\text{A.40a})$$

$$\tilde{\rho}(0) = \rho_0 \quad (\text{A.40b})$$

$$\rho_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H_0}{T}} \quad Z = Tr[e^{-\frac{H_0}{T}}] \quad (\text{A.40c})$$

Wie Eingangs erwähnt sind wir an der Antwort des Systems interessiert, dazu berechnen wir formal den Erwartungswert einer beliebigen Observable O des Systems

$$\langle O(t) \rangle = Tr[\tilde{\rho}(t)\tilde{O}(t)] \quad (\text{A.41})$$

Dabei benützen wir die Tatsache, dass Erwartungswerte von Observablen in allen Bildern (Schrödinger-, Heisenberg-, Wechselwirkungsbild) aufgrund der Unitarität des Zeitentwicklungsoperators zum gleichem Ergebnis führen.

Wir berechnen (A.41) störungstheoretisch um die dynamische Suszeptibilität zu erhalten. Dazu integrieren wir (A.40a) formal und lösen durch Iteration wobei wir nur eine Iteration durchführen, das Ergebnis lautet

$$\tilde{\rho}(t) = \rho_0 + i \int_0^t dt' [F(t')\tilde{S}(t'), \rho_0] \quad (\text{A.42})$$

Setzen wir (A.42) in (A.41) ein so erhalten wir

$$\langle O(t) \rangle^{(1)} = Tr[\rho_0 O(t)] + i \int_0^t dt' Tr\{p_0[\tilde{O}(t), F(t')\tilde{S}(t')]\} \quad (\text{A.43a})$$

Dabei haben wir die zyklische Invarianz der Spur benützt.

Für die Abweichung $\langle \Delta O(t) \rangle$ vom Mittelwert $Tr[\rho_0 O(t)] = \langle O(t) \rangle^{(0)}$ erhalten wir damit, wenn wir zusätzlich noch $t_0 = 0 \rightarrow -\infty$ gehen lassen

$$\langle \Delta O(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t, t') F(t') \quad (\text{A.44a})$$

$$\chi(t, t') := i Tr\{p_0[\tilde{O}(t), \tilde{S}(t')]\} \Theta(t - t') \quad (\text{A.44b})$$

Wir haben damit die dynamische Suszeptibilität χ erhalten, welchen einen linearen Zusammenhang zwischen der Antwort des Systems auf eine von außen angelegte Kraft beschreibt, Gleichung (A.44a) ist auch unter der Namen "Kubo-Formel" bekannt.

Setzen wir zeitliche Translationsinvarianz voraus, die wie wir später sehen, sicherlich gegeben ist, so können wir (A.44a) Fouriertransformieren und erhalten mit Hilfe des Faltungstheorems

$$\langle \Delta O(\omega) \rangle = \chi(\omega) F(\omega) \quad (\text{A.45})$$

Sie besagt, dass eine Kraft gegebener Frequenz ω eine Antwort des Systems bei gleicher Frequenz liefert.

A.2.4. Fluktuations-Dissipations-Theorem

In diesem Abschnitt leiten wir das Fluktuations-Dissipations-Theorem kurz her. Dieses Theorem stellt einen Zusammenhang zwischen der linearen Responsefunktion und den Gleichgewichtsfuktuationen her, damiteingehend ist es auch in experimenteller Hinsicht von großer Bedeutung, da es Aufschluss über die Badkorrelationsfunktionen eines Systems gibt, die wie wir im Bloch Redfield Formalismus gesehen haben wichtige Information über die an das System koppelnde Umgebung liefern 2.

Im folgenden versuchen wir die dynamische Suszeptibilität im Fourierraum weiter zu analysieren.

Dazu schieben wir zunächst die Vollständigkeitsrelation der Eigenzustände $H_0 |n\rangle = \omega_n |n\rangle$ in den Ausdruck für die Suszeptibilität (A.44b) ein und erhalten,

$$\chi(t-t') = \frac{i\Theta(t-t')}{Z} \sum_{nm} e^{-\frac{\omega_n}{T}} \left\{ \langle n|O|m\rangle \langle m|S|n\rangle e^{i(\omega_n-\omega_m)(t-t')} - \langle n|S|m\rangle \langle m|O|n\rangle e^{-i(\omega_n-\omega_m)(t-t')} \right\} \quad (\text{A.46})$$

Wir Fouriertransformieren den so gewonnen Ausdruck, und verwenden dabei die Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Theta(\tau) e^{-i\omega\tau - \eta\tau} = \frac{1}{\eta + i\omega} \quad (\text{A.47a})$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{-i}{\omega - i\eta} = -iP\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta(\omega) \quad (\text{A.47b})$$

damit ergibt sich für den Imaginärteil von $\chi(\omega)$

$$\text{Im}[\chi(\omega)] = \frac{\pi}{Z} \sum_{nm} e^{-\frac{\omega_n}{T}} \left\{ \langle n|O|m\rangle \langle m|S|n\rangle \delta(\omega - \omega_n + \omega_m) - \langle n|S|m\rangle \langle m|O|n\rangle \delta(\omega + \omega_n - \omega_m) \right\} \quad (\text{A.48})$$

Ein Vergleich mit (A.29a) und (A.29b) zeigt

$$\text{Im}[\chi(\omega)] = \frac{1}{2} (C_{AB}^>(\omega) - C_{AB}^<(\omega)) \stackrel{(\text{A.30b})}{=} \frac{1}{2} C_{AB}^>(\omega) (1 - e^{-\frac{\omega}{T}}) \quad (\text{A.49})$$

Wir haben damit einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Responsefunktion $\text{Im}\chi(\omega)$ und den Fluktuationen im Gleichgewicht, beschrieben durch die Korrelationsfunktion $C_{AB}^>(\omega)$, hergeleitet. Betrachten wir den Fall $A = B$ so sehen wir weiters, dass $\text{Im}[\chi] = A(\omega)$, d.h. $\text{Im}[\chi]$ genau unsere zuvor in (A.33b) definierte antisymmetrisierte Korrelationsfunktion ist. Wir können also für (A.34) auch schreiben

$$S(\omega) = \text{Im}[\chi(\omega)] \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \quad (\text{A.50a})$$

$$A(\omega) = \text{Im}[\chi(\omega)] \quad (\text{A.50b})$$

Auch diese Form findet man oft in der Literatur, und ist allgemein unter dem Namen Fluktuations-Dissipations-Theorem bekannt.

Diese Theorem ist von großem Nutzen, da es die experimentell bestimmbare Responsefunktion in Zusammenhang mit den Gleichgewichtskorrelationsfunktionen bringt, welche für die Beschreibung von physikalischen Systemen oftmals hinreichend Information über das Bad liefert, siehe dazu auch Kapitel 2.

A.2.5. Eigenschaften der Lösung der Bloch Redfield Gleichungen

Wir zeigen hier einige wichtige Eigenschaften über die Struktur der Eigenwerte der Mastergleichung der Bloch Redfield Gleichungen.

- Es existiert ein Eigenwert λ_0 mit $\lambda_0 = 0$ wessen zugehöriger normierter Eigenvektor gleich dem Gleichgewichtszustand ist.

Beweis:

In Sekularer Näherung hatten wir erreicht, dass alle Diagonalelemente von allen Nichtdiagonalelementen der Dichtematrix des Systems entkoppelt sind, weiterhin hatten wir Mastergleichungen für unsere Diagonalelemente erhalten, welche die Gesamtwahrscheinlichkeit erhalten (2.36). Daraus folgt, dass eine Gleichung des Redfield Tensors linear abhängig von den Anderen ist. Dies hat zur Folge, dass die Determinante der selbigen verschwindet. Aus dem Verschwinden der Determinante folgt sofort, dass es einen Eigenwert λ' geben muss der Null ist ($\det[\mathcal{L}_{m'm,n'n}] = \prod_i \lambda_i$).

Der zugehörige Eigenvektor $\vec{v}' := \vec{v}_i$ stellt bei entsprechender Normierung N den stationären Zustand $\vec{\rho}_\infty$ des Systems dar, den

$$\dot{\vec{\rho}} = \mathcal{L} \vec{\rho} \quad (\text{A.51a})$$

$$0 \equiv \mathcal{L} \vec{\rho}_\infty \quad (\text{A.51b})$$

$$\mathcal{L} \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (\text{A.51c})$$

$$\mathcal{L} \vec{v}' = 0 \quad (\text{A.51d})$$

Hieraus folgt sofort $\vec{\rho}_\infty = \frac{1}{N} \vec{v}'$. Wir halten damit fest, dass wir für jeden stationären Zustand einen Eigenwert gibt der Null ist (für nichtentartete Eigenwerte).

- Für die Realteile der Eigenwerte der Mastergleichung gilt: $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$ für alle i .

Beweis:

Mit Hilfe der nach seinem Begründer Semjon Aranowitsch Gerschgorin eingeführten Gerschgorin-Kreise können wir eine Abschätzung über die Eigenwerte einer allgemein komplexen, quadratischen Matrix $A \in C^{n \times n}$ machen [50]. Diese sind allgemein wie folgt definiert

$$S_i : = S_i \left(a_{ii}, \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right) \quad i \in 1, \dots, n \quad (\text{A.52})$$

$$S_j : = S_j \left(a_{jj}, \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right) \quad i \in 1, \dots, n \quad (\text{A.53})$$

A. Anhang

Mit $S(x, r)$ dem Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt x und Radius r . Das Theorem besagt nun, dass das Spektrum der Eigenwerte der Matrix A in der Vereinigungsmenge der jeweils n Gerschgorin-Kreise liegt

$$\text{Spektrum von } A \in \bigcup_j^n S_j \quad (\text{A.54})$$

Mit der aus (2.36) bereits bekannten Beziehung

$$\sum_m R_{mmnn} = 0 \quad (\text{A.55})$$

welche die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringt, können wir sehr einfach zeigen, dass die Abschätzung mit Hilfe der Gerschgorin-Kreise über die Spalten S_j zeigt, dass der Realteil der Eigenwerte der Mastergleichungen (für alle Temperaturen T) kleiner gleich Null sein muss $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$. Für die Eigenwerte der Nebendiagonalelemente sind hingegen die Einträge die entsprechenden Einträge der Liouville-Matrix deren Realteil genauso kleiner gleich Null ist $\text{Re}[\mathcal{L}_{m'mm'm}] = \text{Re}[-\gamma_{m'm}] \leq 0$ mit $m' \neq m$. Wir werden dies explizit im nächsten Abschnitt über die Dephasierungsraten zeigen.

Literaturverzeichnis

- [1] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] Divincenzo, D. P. The Physical Implementation of Quantum Computation. *Fortschritte der Physik*, 48:771–783, 2000.
- [3] Peter W. Shor. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Journal on Computing*, 26(5):1484–1509, 1997.
- [4] Cirac, J. I. and Zoller, P. . Quantum Computations with Cold Trapped Ions. *Phys. Rev. Lett.*, 74(20):4091–4094, May 1995.
- [5] B. E. Kane. A silicon-based nuclear spin quantum computer. *Nature*, 393(6681), 1998.
- [6] Jeremy L. O’Brien. Optical quantum computing. *Science*, 318(5856):1567–1570, 2007.
- [7] Shnirman, Alexander and Schön, Gerd and Hermon, Ziv . Quantum Manipulations of Small Josephson Junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 79(12):2371–2374, Sep 1997.
- [8] J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, Lin Tian, Caspar H. van der Wal, and Seth Lloyd. Josephson persistent-current qubit. *Science*, 285(5430):1036–1039, 1999.
- [9] JOHN CLARKE, ANDREW N. CLELAND, MICHEL H. DEVORET, DANIEL ESTEVE, and JOHN M. MARTINIS. Quantum mechanics of a macroscopic variable: The phase difference of a josephson junction. *Science*, 239(4843):992–997, 1988.
- [10] Devoret, M. H. and Wallraff, A. and Martinis, J. M. Superconducting Qubits: A Short Review. *ArXiv Condensed Matter e-prints*, November 2004.
- [11] Lisenfeld, Jürgen. Experiments on Superconducting Josephson Phase Quantum Bits. 2008.
- [12] Caldeira, A. O. and Leggett, A. J. Quantum tunnelling in a dissipative system. *Annals of Physics*, 149:374–456, September 1983.
- [13] H. Poincaré. *Acta Math.*, 13(1), 1890.
- [14] Schwabl, Franz. *Statistische Mechanik : mit 26 Tabellen*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 3., aktualisierte aufl. edition, 2006.
- [15] Shnirman, Alexander and Schön, Gerd and Martin, Ivar and Makhlin, Yuriy . Low- and High-Frequency Noise from Coherent Two-Level Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 94(12):127002, Apr 2005.
- [16] Müller, Clemens. Relaxation von Josephson Quantenbits durch 2-Niveau-Systeme. Oct 2007.

- [17] Simmonds, R. W. and Lang, K. M. and Hite, D. A. and Nam, S. and Pappas, D. P. and Martinis, John M. Decoherence in Josephson Phase Qubits from Junction Resonators. *Phys. Rev. Lett.*, 93(7):077003, Aug 2004.
- [18] Lupascu, A. and Bertet, P. and Driessen, E. F. C. and Harmans, C. J. P. M. and Mooij, J. E. One- and two-photon spectroscopy of a flux qubit coupled to a microscopic defect. *Phys. Rev. B*, 80(17):172506, Nov 2009.
- [19] Lisenfeld, Jürgen and Müller, Clemens and Cole, Jared H. and Bushev, Pavel and Lukashenko, Alexander and Shnirman, Alexander and Ustinov, Alexey V. Rabi spectroscopy of a qubit-fluctuator system. *Phys. Rev. B*, 81(10):100511, Mar 2010.
- [20] Bushev, P. and Müller, C. and Lisenfeld, J. and Cole, J. H. and Lukashenko, A. and Shnirman, A. and Ustinov, A. V. Multiphoton spectroscopy of a hybrid quantum system. *Phys. Rev. B*, 82(13):134530, Oct 2010.
- [21] Zeller, R. C. and Pohl, R. O. Thermal Conductivity and Specific Heat of Noncrystalline Solids. *Phys. Rev. B*, 4(6):2029–2041, Sep 1971.
- [22] Anderson P. w., Halperin B. I., Varma C. M. Anomalous low-temperature thermal properties of glasses and spin glasses. *Philosophical Magazine*, 25, 1972.
- [23] Phillips, W. A. Tunneling states and the low-temperature thermal expansion of glasses. *Journal of Low Temperature Physics*, 11:757–763, 1973. 10.1007/BF00654457.
- [24] Martinis, John M. and Cooper, K. B. and McDermott, R. and Steffen, Matthias and Ansmann, Markus and Osborn, K. D. and Cicak, K. and Oh, Seongshik and Pappas, D. P. and Simmonds, R. W. and Yu, Clare C. Decoherence in Josephson Qubits from Dielectric Loss. *Phys. Rev. Lett.*, 95(21):210503, Nov 2005.
- [25] J. H. Cole and C. Müller and P. Bushev and G. J. Grabovskij and J. Lisenfeld and A. Lukashenko and A. V. Ustinov and A. Shnirman. Quantitative evaluation of defect-models in superconducting phase qubits. *Applied Physics Letters*, 97(25):252501, 2010.
- [26] Y. M. Galperin and D. V. Shantsev and J. Bergli and B. L. Altshuler. Rabi oscillations of a qubit coupled to a two-level system. *EPL (Europhysics Letters)*, 71(1):21, 2005.
- [27] S Ashhab and J R Johansson and Franco Nori. Rabi oscillations in a qubit coupled to a quantum two-level system. *New Journal of Physics*, 8(6):103, 2006.
- [28] Ku, Li-Chung and Yu, Clare C. Decoherence of a Josephson qubit due to coupling to two-level systems. *Phys. Rev. B*, 72(2):024526, Jul 2005.
- [29] Palomaki, T. A. and Dutta, S. K. and Lewis, R. M. and Przybysz, A. J. and Paik, Hanhee and Cooper, B. K. and Kwon, H. and Anderson, J. R. and Lobb, C. J. and Wellstood, F. C. and Tiesinga, E. . Multilevel spectroscopy of two-level systems coupled to a dc SQUID phase qubit. *Phys. Rev. B*, 81(14):144503, Apr 2010.
- [30] Josef Schrieffl and Yuriy Makhlin and Alexander Shnirman and Gerd Schön. Decoherence from ensembles of two-level fluctuators. *New Journal of Physics*, 8(1):1, 2006.

- [31] N. Matthew; M. Ansmann; R. C. Bialczak; M. Hofheinz; N. Katz; E. Lucero; A. O'Connell; H. Wang; A. N. Cleland; J. M. Martinis. Process tomography of quantum memory in a Josephson-phase qubit coupled to a two-level state. *Nat Phys*, 4:1745–2473, 2008/07//print.
- [32] Lisenfeld, J. and Müller, C. and Cole, J. H. and Bushev, P. and Lukashenko, A. and Shnirman, A. and Ustinov, A. V. Measuring the Temperature Dependence of Individual Two-Level Systems by Direct Coherent Control. *Phys. Rev. Lett.*, 105(23):230504, Dec 2010.
- [33] Müller, Clemens and Shnirman, Alexander and Makhlin, Yuriy . Relaxation of Josephson qubits due to strong coupling to two-level systems. *Phys. Rev. B*, 80(13):134517, Oct 2009.
- [34] Bloch, F. . Generalized Theory of Relaxation. *Phys. Rev.*, 105(4):1206–1222, Feb 1957.
- [35] Redfield, A.G. 1957.
- [36] Blum, Karl. *Density matrix theory and applications*. Physics of atoms and molecules. Plenum Pr., New York [u.a.], 2. ed. edition, 1996. Previous ed.: 1981. - Includes index.
- [37] Howard Carmichael, editor. *Statistical methods in quantum optics*, volume 1: Master equations and Fokker-Planck equations of *Texts and monographs in physics*. Springer, Berlin, 1999.
- [38] Schrieffer, Josef. Dekohärenz in Josephson Quantenbits. Mai 2005.
- [39] Breuer, Heinz-Peter ; Petruccione, Francesco. *The theory of open quantum systems*. Clarendon Press, Oxford, 1. publ. in paperback edition, 2007.
- [40] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. Quantum tunnelling in a dissipative system. *Annals of Physics*, 149(2):374 – 456, 1983.
- [41] *Quantenmechanik*, volume 1:. de Gruyter, Berlin [u.a], 4., durchges. und verb. Aufl. edition, 2009.
- [42] Müller, Clemens. Private Kommunikation: Bereitstellung des Skripts für die numerische Approximation des Phasenqubitpotentials.
- [43] B. Misra and E. C. G. Sudarshan. The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, 18(4):756–763, 1977.
- [44] Itano, Wayne M. and Heinzen, D. J. and Bollinger, J. J. and Wineland, D. J. Quantum Zeno effect. *Phys. Rev. A*, 41(5):2295–2300, Mar 1990.
- [45] P. Kwiat, H. Weinfurter and A. Zeilinger. <http://www.fortunecity.com/emachines/e11/86/seedark.htm>
- [46] Yuriy Makhlin and Gerd Schön and Alexander Shnirma. Dissipative effects in Josephson qubits. *Chemical Physics*, 296(2-3):315 – 324, 2004. The Spin-Boson Problem: From Electron Transfer to Quantum Computing ... to the 60th Birthday of Professor Ulrich Weiss.
- [47] Reichl, Linda E. *A modern course in statistical physics*. Wiley, New York, 2. ed. edition, 1998. Includes bibliographical references and indexes. - Previous ed.: London : Edward Arnold, 1980; : £75.00 : Formerly CIP.

Literaturverzeichnis

- [48] Kogan, Sh. *Electronic noise and fluctuations in solids*. Cambridge University Press, Cambridge [u.a.], 1. publ. edition, 1996. Includes bibliographical references and index; : No price : Formerly CIP.
- [49] Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II), 2008. In: Springer-Online.
- [50] Gerschgorin, Semjon Aranowitsch. <http://de.wikipedia.org/wiki/Gerschgorin-Kreis>.